

# ¡¡¡BIENVENIDOS!!!

## MATEMÁTICA Y ARQUITECTURA

### Taller Vertical Matemática I-II

**Titular:** Arq. Prof. Susana Toscano

**Adjunta:** Arq. María Elvira Garbesi

#### Mate I

**JTP:** Arq. Maximiliano Monteros

#### Auxiliares

Arq. Carolina Jaimón

Prof. Cristina Mandes

Prof. Erica Kallenbach

Arq. Ezequiel Pérez

Dra. Gabriela Ravenna

Prof. Guadalupe Ramírez

Arq. Leandro Capparelli

Arq. Manuela Fuertes

Ing. María Elena Degaudenzi

Arq. Nicolás Oteiza

Arq. Verónica López

#### Mate II

**JTP:** Ing. Luis Bianchetti

#### Auxiliares

Arq. Ana Isaac

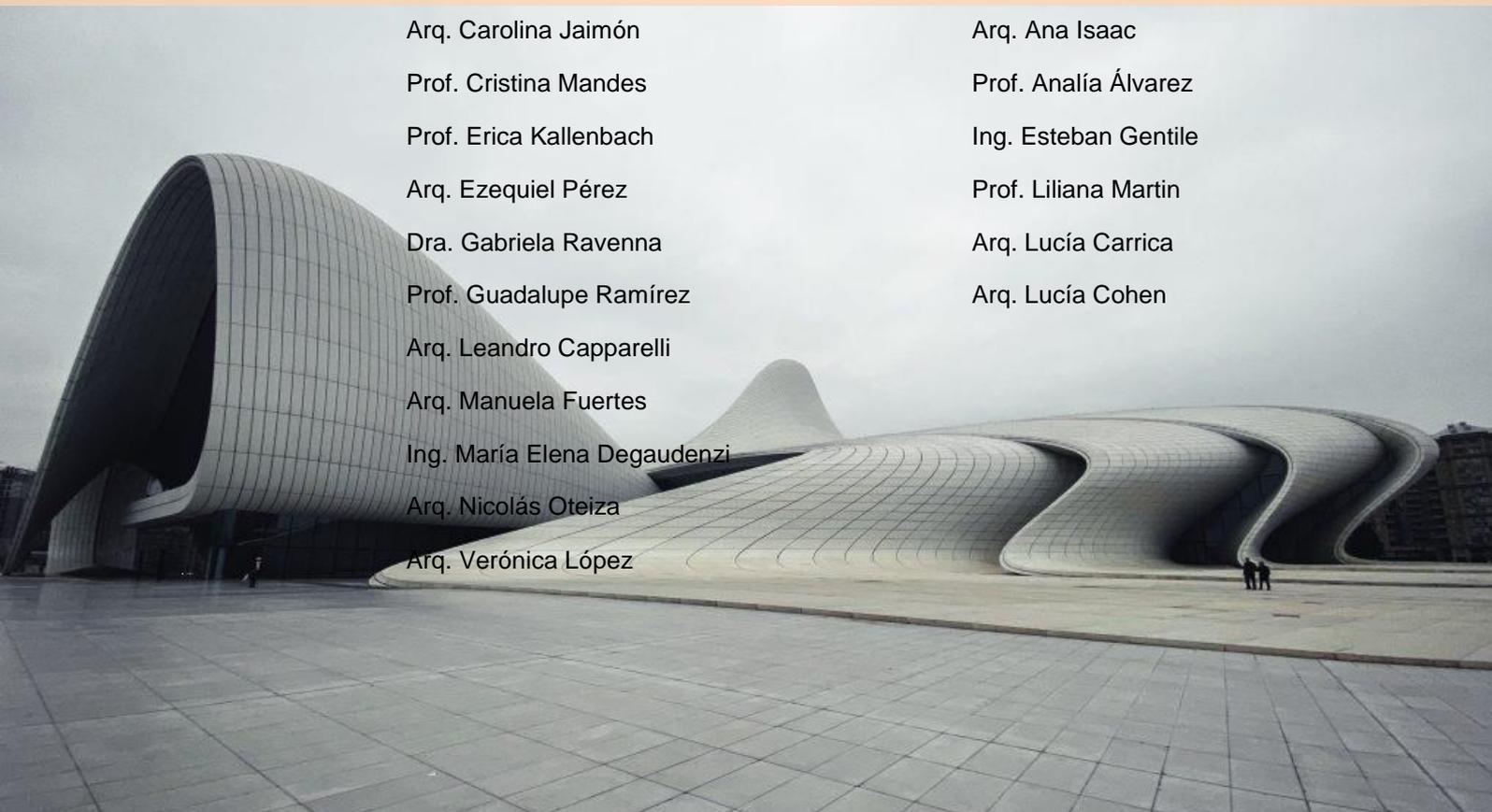
Prof. Analía Álvarez

Ing. Esteban Gentile

Prof. Liliana Martin

Arq. Lucía Carrica

Arq. Lucía Cohen



UNIVERSIDAD NACIONAL  
de MAR DEL PLATA  
.....



**faud.unmdp**

## NÚMEROS REALES

Los subconjuntos que constituyen el conjunto de los números Reales (R) son:

- **RACIONALES (Q):** sus elementos pueden expresarse como cociente entre números enteros

Los subconjuntos de los racionales son:

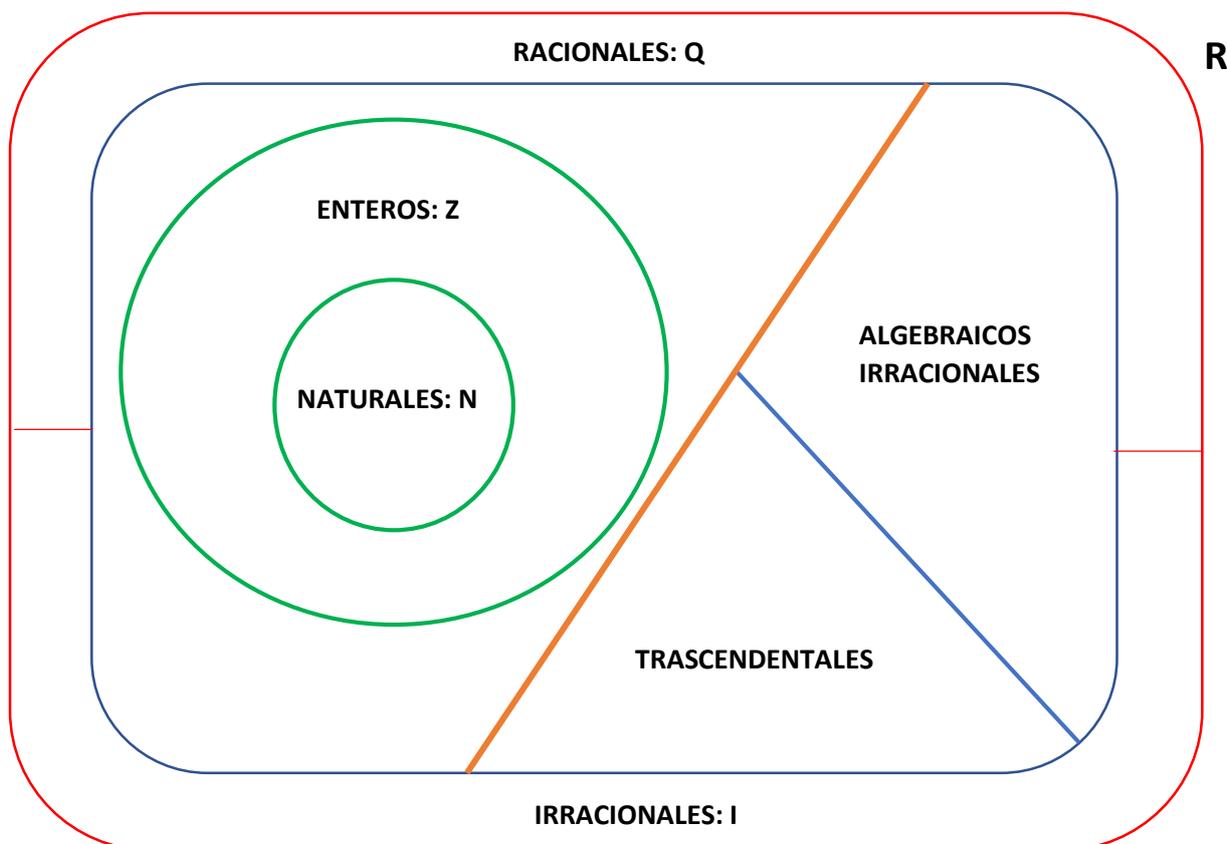
- Naturales (N)
- Enteros (Z)
- Fraccionarios (Q)

- **IRRACIONALES (I):** no pueden expresarse como cociente entre números enteros. Tienen infinitos decimales no siendo periódicos

Los irracionales se clasifican en:

- **Algebraicos:** son los irracionales que surgen de resolver una ecuación polinómica
- **Trascendentes:** No son solución de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales

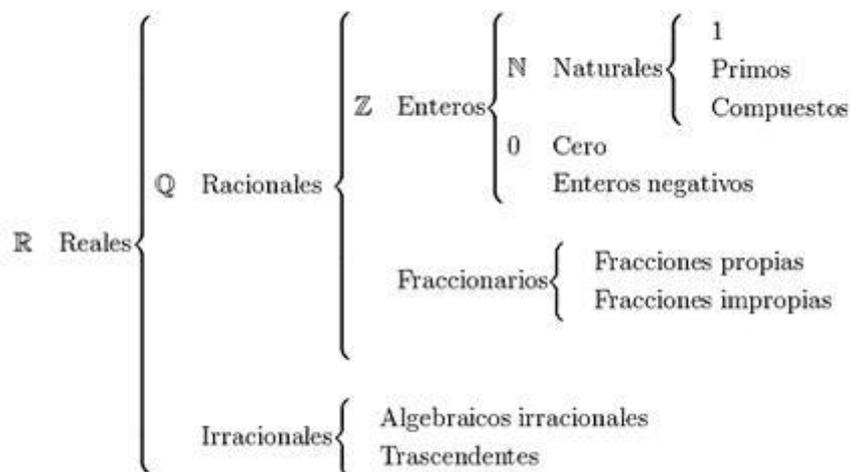
CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES REALES: R



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$Q \cup I = R$$

$$Q \cap I = \emptyset$$



## OPERACIONES Y PROPIEDADES

En  $\mathbf{R}$  se definen las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

- La suma, la resta y multiplicación siempre tienen un resultado
- La división no está definida cuando el divisor es cero.
- La multiplicación es distributiva de la resta y la suma.

$$(a + b) \cdot c = c(a + b) = ac + bc$$

- La división sólo se distribuye el divisor respecto de la suma y la resta

$$: c(a + b) : c \neq c : (a + b)$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

## POTENCIACIÓN

La potenciación es una operación que consiste en multiplicar por sí mismo un número llamado base, tantas veces como lo indique otro número que se llama exponente.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n \geq 2, \quad n: \text{factores}$$

Se define:

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ si } a \neq 0$$

De la definición surge que no están definidas  $0^0$  ni  $0^{-n}$

### PROPIEDADES

$$1) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; (a : b)^n = a^n : b^n$$

$$2) a^n \cdot a^p = a^{n+p}; a^n : a^p = a^{n-p}$$

$$3) (a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

4) La potenciación **NO** es distributiva respecto de la suma y la resta

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n; (a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Para  $n = 2$ , Trinomio cuadrado perfecto

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \text{ y que: } (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Para  $n = 3$ : Cuatrinomio cubo perfecto

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \text{ y } (a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

5) Diferencia de cuadrado

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

## RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Y consiste en que dados dos números, llamados radicando e índice, hallar un tercero, llamado raíz, tal que, elevado al índice, sea igual al radicando.

$$\text{índice} \sqrt{\text{Radicando}} = \text{Raíz}$$

En símbolos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Cuando  $n = 2$  (raíz cuadrada) hay dos números, opuestos entre sí, que satisfacen  $b^2 = a$ , pero **SÓLO EL VALOR POSITIVO** es el resultado de la raíz.

Ejemplo:  $\sqrt{16} = 4$  y es un error escribir  $\sqrt{16} = \pm 4$

Esto no debe confundirse con la resolución de la ecuación  $x^2 = 16$ , que tiene **DOS SOLUCIONES** que son  $4$  y  $-4$ .

En la práctica, cada vez que tengamos este tipo de ecuación, procedemos así:

$$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

**PERO NO ASÍ:**

$$x^2 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$$

Tal como ha sido definida (con radicandos positivos), la radicación cumple las propiedades:

$$1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} ; \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

$$2) (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$3) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$4) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ siendo } p \in \mathbb{N}.$$

**Muy importante:** aplicar estas propiedades cuando  $a < 0$  ó  $b < 0$  es erróneo; en particular la simplificación de índice y exponente no puede hacerse si “n” es par y  $a < 0$ .

Por ejemplo, es erróneo simplificar así:  ~~$\sqrt{(-3)^2} = -3$~~

Porque “a” es negativo y las propiedades se cumplen para radicandos positivos. Lo correcto es proceder así:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

donde  $|a|$  representa el valor absoluto de “a”, que nunca es negativo.

**Muy importante 2:** la definición se propone para  $n$  par; pero ¿qué ocurre si  $n$  impar?

Si  $n$  impar, se define:

Si  $a$  es un número real y “ $n$ ” es un natural impar, resulta  $\sqrt[n]{a} = b$  y  $b^n = a$ .

Por ejemplo:  $\sqrt[3]{-27} = -3$  pues  $(-3)^3 = -27$

## POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

**Definición:** si  $a \geq 0$  es un número real y “ $m$ ”, “ $n$ ” son dos números naturales, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} \text{ si } a \neq 0$$

Las propiedades de estas potencias son las mismas que las de exponente entero cuando  $a \geq 0$ .

## APROXIMACIONES

Si la primera cifra a eliminar es mayor o igual a cinco, se le suma **1** a la cifra anterior (por exceso).

Si la primera cifra a eliminar es menor que cinco, se suprimen todas las cifras a partir de ella (por defecto).

$\varepsilon < 0,1$   $\longleftrightarrow$  un decimal

$\varepsilon < 0,01$   $\longleftrightarrow$  dos decimales

$\varepsilon < 0,001$   $\longleftrightarrow$  tres decimales

etc.                      etc.

## NOTACIÓN CIENTÍFICA

Forma de escribir a un número como producto entre un número mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de **10** de exponente entero. Se usa para números muy pequeños, o bien muy grandes.

Ejemplo:  $0,0000000057 = 5,7 \times 10^{-9}$

$$1.345.000.000.000 = 1,345 \times 10^{12}$$

## EJERCITACIÓN

1) Calificar **V** (verdadero) o **F** (falso), siendo  $x, y, z \in \mathbb{R}$  :

a)  $x^2 \geq 0$

b)  $-x^2 < 0$

c)  $-x^2 = (-x)^2$

d)  $-x$  puede ser positivo

e)  $-x^2$  puede ser positivo

f)  $(x - y)^2 = (y - x)^2$

g)  $\sqrt[n]{-x}$  nunca está definida

h) si  $x + y = z$  entonces  $x^2 + y^2 = z^2$

i)  $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

j)  $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

2) Clasificar los números dados en racionales e irracionales:

$$1 ; -\frac{3}{2} ; 0,7 ; 1,289 ; 1 - \sqrt{2} ; 2.\pi ; \frac{3}{2}.\pi ; \frac{13}{2}.e ; \frac{2 + \pi}{7} ; \frac{5 + \pi}{7} ;$$

$$\frac{10.\sqrt{5}}{3} ; 2 + \sqrt{3}$$

RACIONALES	
IRRACIONALES	

3) Escribir la proposición dada como una desigualdad:

<b>x</b> es positiva	
<b>y</b> es negativo	
<b>a</b> es mayor que <b>-3</b>	
<b>b</b> no es menor o igual que <b>7</b>	
<b>c - 1</b> es menor o igual que <b>8</b>	
<b>x</b> está comprendido entre dos y cinco	
<b>x</b> supera a <b>7</b> y es, a lo sumo, igual a <b>20</b>	

4) Expresar usando exponentes:

a)  $\frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8} =$

b)  $3 \cdot 3 \cdot 3 =$

c)  $2y \cdot 2y \cdot 2y \cdot 2y =$

d)  $\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} =$

5) Expresar usando exponente negativo:

a)  $\frac{1}{4^5} =$

b)  $\frac{x^2}{y^2} =$

c)  $\frac{1}{x^3} =$

d)  $\left(\frac{1}{z}\right)^2 =$

6) Calcular:

a)  $3^4 =$

b)  $3^{-4} =$

c)  $-3^4 =$

d)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

e)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

f)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

g)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 =$

h)  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

i)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} =$

7) Resolver, si es posible:

a)  $2^{-1} \cdot 2^1 =$

b)  $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} =$

c)  $\frac{2^{-1} - 3^{-1}}{2^{-1} + 3^{-1}} =$

d)  $\frac{(-1)^5 - 2^6}{(-1)^{-1}} =$

e)  $\frac{0^1}{1^0} =$

f)  $\frac{(1 - 1)^0}{1^0} =$

8) Encontrar el valor de la expresión si:  $a = 2$  ;  $b = -3$  y  $c = -1$

a)  $-2ab + c^2 =$

b)  $ab^2 - c^3 =$

c)  $ab^2 + bc^2 + ca^2 =$

d)  $a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} =$

9) Simplificar y transformar cualquier exponente negativo:

a)  $x^6 \cdot x^{-2} =$

b)  $2^{10} \cdot 2^{12} =$

c)  $(7x^4) \cdot (-3x^2) =$

d)  $(-5x^2y^3) \cdot (3xy^{-2}) =$

e)  $\frac{2^8}{2^3} =$

f)  $\frac{3^4}{3^{-2}} =$

g)  $(5x)^2 =$

h)  $(-4x)^3 =$

i)  $(5x^2)^3 =$

j)  $(x^4)^{-5} =$

k)  $(4x^2y^{-1})^3 =$

l)  $(3x^2y^{-1})^{-1} =$

m)  $x^2 \cdot x^3 \cdot x^{-4} =$

n)  $\frac{-x^5 \cdot (y^2)^3}{(xy)^2} =$

o)  $(7a^2b^3)^2 =$

p)  $\frac{(-4x^5y^{-2})^3}{x^7y^{-3}} =$

q)  $(-3xy^5)^2 \cdot (x^3y)^{-1} =$

r)  $\left(\frac{a^4b^{-5}}{b^2}\right)^{-1} =$

s)  $\left(\frac{a^3b^3}{b^{-2}}\right)^2 =$

t)  $(-x^2y^4)^3 \cdot (x^3y^{-1})^2 =$

u)  $\frac{-xy^2z^3}{(xy^2z^3y^{-1})^{-1}} =$

v)  $\frac{(3abc)^3}{(2a^{-1}b^2c)^2} =$

10) Usar las propiedades de las potencias para efectuar:

a)  $2^9 \cdot 3^9 =$

b)  $2 \cdot 2^{10} =$

c)  $5^x \cdot 2^x =$

d)  $7 \cdot 7^n =$

e)  $5^{2x} =$

f)  $5^{2x} \cdot 5^{1-x} =$

g)  $3^{x+2} =$

h)  $a^{2-x} =$

i)  $5^x \cdot 5^{2x+1} \cdot 5^{x-3} =$

j)  $2^{x-1} : 2^{2x+3} =$

k)  $(3^{2x})^{x-5} =$

l)  $3^{4x-1} \cdot 5^{4x-1} =$

m)  $5 \cdot 5^{x-2} =$

11) Calificar V (verdadero) y F (falso). Si es F escribir la verdadera.

a)  $25^x \cdot 5^x = 5^{3x}$      b)  $4^{2x} \cdot 4^x = 4^{3x}$      c)  $\frac{5^x}{5^{2x}} = 1^{-x}$

d)  $7 \cdot 7^{2x} = 49^{2x}$      e)  $\frac{3^x}{9} = 3^x - 2$      f)  $\frac{9^{2x-1}}{3^x} = 3^{3x-2}$

g)  $2^x \cdot 8^{2x-3} = 2^{7x-9}$      h)  $5^x \cdot 2^{2x} = 10^{3x}$

i)  $2^{2x} + 2^x = 2x \cdot (2x + 1)$      j)  $5^{3x} - 5^{2x} = 5^{2x} (5^x - 1)$

12) Calcular, suponiendo que todas las variables son positivas:

a)  $\sqrt[3]{-125}$

b)  $\sqrt[4]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{1}}}$

c)  $\sqrt[5]{100000}$

d)  $\sqrt[4]{16}$

e)  $\sqrt[5]{0,00001}$

f)  $\sqrt[5]{32}$

g)  $\frac{\sqrt[3]{x^3 \cdot y^6}}{z}$

h)  $\sqrt[4]{\frac{x^4 \cdot y^{16}}{16z^8}}$

i)  $\sqrt{0,25x^4} \cdot \sqrt{z^4}$

j)  $\sqrt{8x^2yz^2}$

k)  $\sqrt[3]{4ab^3} \cdot \sqrt[3]{16a^2}$

l)  $\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4}$

m)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

n)  $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

o)  $\frac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{49a} \cdot \sqrt{7b^4}}$

p)  $\frac{\sqrt[3]{4xy} \cdot \sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{x^2z^3}}$

q)  $\sqrt{\sqrt{0,0016}}$

r)  $\sqrt{2 \cdot \sqrt{4}}$

s)  $3 \cdot \sqrt{\sqrt{a^6 b^{12}}}$

t)  $\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 y)^2}}$

u)  $(-\sqrt{xyz^5})^2$

v)  $\sqrt{(-2x^3 y)^2}$

w)  $\sqrt{\frac{-16x^2}{-8x^2}}$

x)  $\frac{\sqrt[3]{(-2x)^3}}{-z^6}$

y)  $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}}$

z)  $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[4]{125}}$

13) Extraer el radical, si es posible:

a)  $\sqrt{x^3}$

b)  $\sqrt{8}$

c)  $\sqrt[3]{16x^4 y^6}$

d)  $\sqrt{\frac{8x^3}{27a^2}}$

e)  $\sqrt{125x^7}$

f)  $\sqrt{32x^3}$

g)  $\sqrt{x^2 + y^4}$

h)  $\sqrt[3]{8 - x^6}$

14) Racionalizar el denominador:

a)  $\frac{1}{\sqrt{27}}$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

c)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

d)  $\frac{a}{1 + \sqrt{a}}$

e)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

f)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

g)  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

h)  $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

i)  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

j)  $\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}$

k)  $\frac{4}{\sqrt[3]{x-1}}$

l)  $\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}$

15) Racionalizar mentalmente:

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$     b)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$     c)  $\frac{2}{\sqrt{6}}$     d)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$     e)  $\frac{7}{\sqrt{2}}$     f)  $\frac{-1}{\sqrt{11}}$     g)  $\frac{7}{\sqrt{3}}$     h)  $\frac{-8}{\sqrt{13}}$

16) Efectuar y reducir en lo posible:

a)  $4\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} =$

b)  $\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{8} =$

c)  $4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} =$

d)  $3\sqrt{8x^3} - \sqrt{18xy^2} + \sqrt{32x^5} =$

e)  $\sqrt[3]{x^4yz} - \sqrt[3]{xy^4z} + \sqrt[3]{xyz^4} =$

f)  $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a^3}{b}} =$

g)  $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{\sqrt[3]{xy}}{y^2} =$

h)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 =$

i)  $2 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 =$

j)  $(3\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1) =$

k)  $(\sqrt{2} - 3)(-5\sqrt{2} + 1) =$

l)  $\frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{32}) =$

17) Escribir la expresión dada usando exponentes racionales:

a)  $\sqrt[3]{ab}$

b)  $\sqrt[5]{7x}$

c)  $\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^4}$

d)  $\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}$

e)  $\sqrt[7]{(x+y)}$

f)  $\sqrt[3]{a^2 + b^2}$

g)  $\sqrt{x + \sqrt{x}}$

h)  $\sqrt{x^2 + y^2}$

18) Escribir en forma radical:

a)  $a^{\frac{2}{3}}$

b)  $2a^{\frac{1}{3}}$

c)  $(3a)^{\frac{2}{3}}$

d)  $3a^{\frac{2}{3}}$

e)  $3 + a^{\frac{2}{3}}$

f)  $(3 + a)^{\frac{2}{3}}$

g)  $\frac{3}{a^{\frac{2}{3}}}$

h)  $(3a)^{-\frac{1}{2}}$

19) Escribir el resultado de cada potencia:

a)  $49^{\frac{1}{2}}$

b)  $49^{-\frac{1}{2}}$

c)  $(-8)^{\frac{1}{3}}$

d)  $(-8)^{-\frac{1}{3}}$

e)  $(0,04)^{\frac{7}{2}}$

f)  $(0,04)^{-\frac{7}{2}}$

g)  $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

h)  $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

i)  $(27)^{\frac{7}{3}}$

j)  $(-27)^{-\frac{7}{3}}$

k)  $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

l)  $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

20) Simplificar y escribir con exponentes positivos:

a)  $(4x^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{3}})$

b)  $a^{\frac{2}{3}}(4a^{\frac{2}{3}})$

c)  $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}}$

d)  $(a^2b^4)^{\frac{1}{4}}$

e)  $(25x^{\frac{1}{3}}y)^{\frac{3}{2}}$

f)  $\frac{cd^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}d}$

g)  $\left(\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{z^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^6$

h)  $\left[(-27a^3b^{-6})^{\frac{1}{3}}\right]^2$

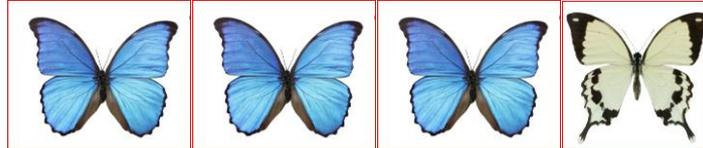
i)  $(x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}})^2 x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

j)  $\left[5x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}\right]^3$

## PROPORCIONES

### RAZÓN

Una razón es la comparación de dos cantidades obtenida mediante una división. Nos indica cuántas veces contiene una a la otra.



En la figura podemos observar que 3 de 4 mariposas son azules y lo expresamos:

$$3:4 \text{ o bien } \frac{3}{4}$$

$$\text{Pero } \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\text{Y } 0,75 = 75\%$$

Por lo que podremos decir que tres cuartos de las mariposas son azules o que el 75 por ciento lo son.

### PROPORCIONALIDAD

Observemos ahora la siguiente figura:



En este caso podremos decir que 2 de 4 mariposas son azules, o que la mitad de ellas es azul o que el 50% de las mariposas son azules, por lo que podremos escribir:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50$$

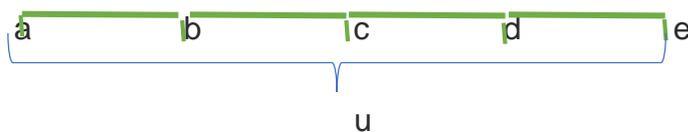
En este caso estamos en presencia de una proporción, por lo tanto una proporción es la igualdad entre dos o más razones.

Notación:

$a : b :: c : d$  que se lee: “a” es a “b” como “c” es a “d”; o bien

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Geoméricamente ocurre exactamente lo mismo



En el gráfico podemos decir que si el segmento ae es la unidad, el segmento ab es  $\frac{1}{4}$  del total

Si la unidad es el segmento ab, diremos que ae es 4 veces la unidad:  $4 \cdot ab$ .

Algunos conceptos que nos van a servir para más adelante son los siguientes:

Los valores “a” y “c”, se denominan antecedente de la primera y segunda razón, mientras que “b” y “d” se denominan consecuentes.

“a” y “d” se denominan extremos

“b” y “c” son los medios.

Si  $b = c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{d} \text{ y } a \cdot d = b^2$

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

Esta propiedad nos va a servir para resolver ecuaciones:

Si a, b, c y x son cuatro números reales tales que a, b y c son conocidos y que forman proporción en ese orden, para hallar x seguimos los siguientes pasos:

Planteamos la proporción  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Se aplica la propiedad fundamental  $a.x = b.c$

Se despeja x, entonces  $x = \frac{b.c}{a}$

Por ejemplo : Hallar x, si a, b, c y x forman proporción en ese orden sabiendo que  $a = 3$ ,  $b = \sqrt{2}$  y  $c = -1$ ?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{x} ; \text{ luego } 3.x = \sqrt{2} . (-1) ; \text{ Es decir } x = \frac{-\sqrt{2}}{3} = -0.4714$$

En el gráfico podemos decir que si el segmento ae es la unidad, el segmento ab es  $\frac{1}{4}$  del total

Si la unidad es el segmento ab, diremos que ae es 4 veces la unidad:  $4.ab.$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

## PROPIEDADES

1. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

2. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} ;$$

3. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} ;$$

4. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} ;$$

5. Si

6.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} ;$

Ejemplos

$$\frac{-4}{13} = \frac{2}{-6,5}$$

1.  $\frac{-4+13}{-4} = \frac{2+(-6,5)}{2} \Rightarrow \frac{9}{-4} = \frac{-4,5}{2}$

2.  $\frac{-4+13}{13} = \frac{2+(-6,5)}{-6,5} \Rightarrow \frac{9}{13} = \frac{-4,5}{-6,5}$

3.  $\frac{-4-13}{-4} = \frac{2-(-6,5)}{2} \Rightarrow \frac{-17}{-4} = \frac{8,5}{2}$

4.  $\frac{-4-13}{13} = \frac{2-(-6,5)}{-6,5} \Rightarrow \frac{-17}{13} = \frac{8,5}{-6,5}$

5.  $\frac{-4-13}{13} = \frac{2-(-6,5)}{-6,5} \Rightarrow \frac{-17}{13} = \frac{8,5}{-6,5}$

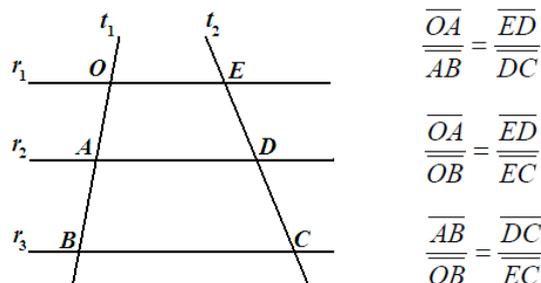
## PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

### Segmentos proporcionales determinados por paralelas

#### Teorema de Tales

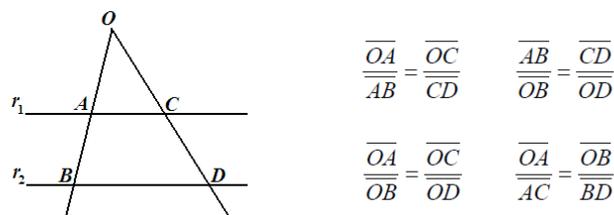
" Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas, es igual a la razón de los segmentos correspondientes en la otra."

Sean  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  rectas paralelas y  $t_1$  y  $t_2$  transversales, el Teorema de Tales establece las siguientes relaciones:



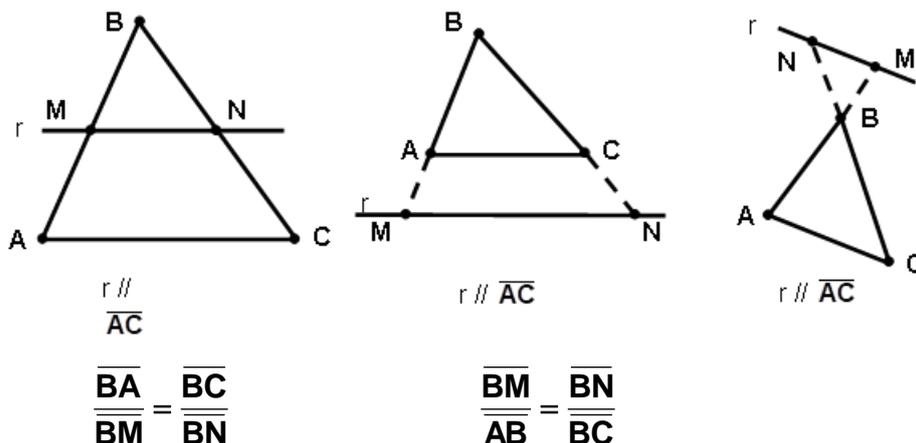
#### Caso particular del Teorema de Tales

Si se tienen dos rectas paralelas  $r_1$  y  $r_2$  que se cortan por dos rectas que presentan un punto común, se forman segmentos proporcionales que cumplen las siguientes relaciones:



#### COROLARIO

Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre las rectas que contienen a los otros dos lados, segmentos tales que sus medidas resultan proporcionales a las medidas de esos lados.



**División de un segmento en partes iguales:**

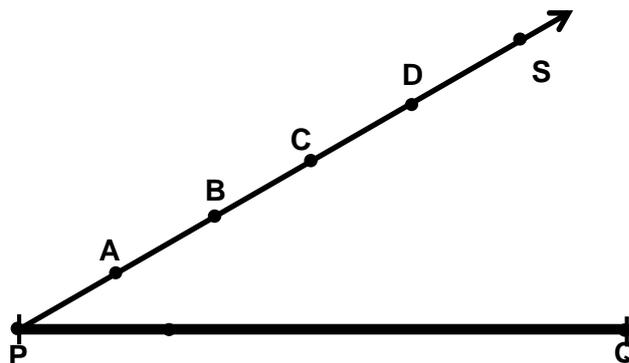
Dividir al segmento  $\overline{PQ}$  en cuatro partes iguales.



Desde uno de los extremos de  $\overline{PQ}$ , se traza una semirrecta que forme con  $\overline{PQ}$  un ángulo agudo. En nuestro caso,  $\overline{PS}$ .

Sobre  $\overline{PS}$  y a partir de  $P$  se transportan cuatro segmentos iguales y consecutivos de cualquier longitud,

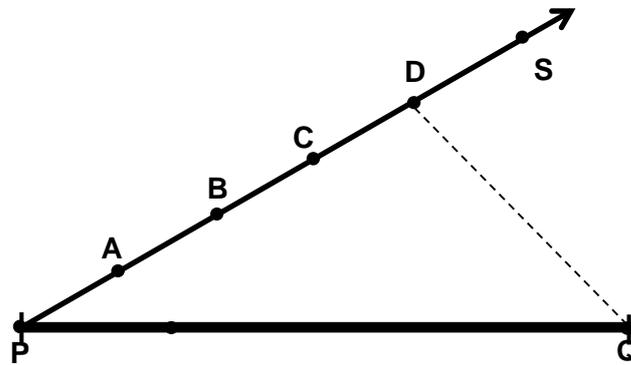
$$\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$$



Uniendo  $D$  con  $Q$  y trazando paralelas a  $\overline{DQ}$  por  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se obtienen sobre  $\overline{PQ}$  los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente, con lo que resulta que:

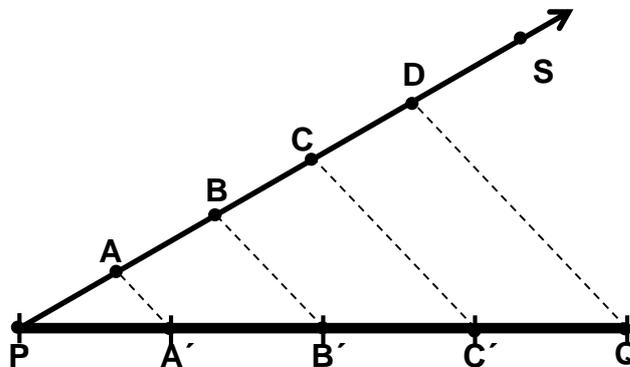
$$\overline{PA'} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'Q}$$

Unimos el último punto de trazado sobre la semirrecta (D) con el otro extremo del segmento dado (Q).



Trazamos paralelas a  $\overline{DQ}$  por A, B y C, se obtienen sobre  $\overline{PQ}$  los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente, con lo que resulta que:

$$\overline{PA'} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'Q}$$

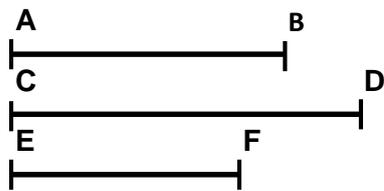


### Determinación de un segmento cuarto proporcional a otros tres dados

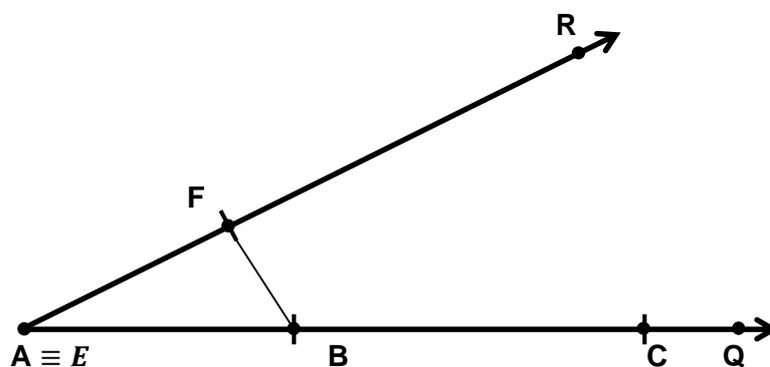
Si debemos construir un segmento  $\overline{x}$  que sea cuarto proporcional entre tres segmentos dados ( $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{EF}$ ) ese segmento debe cumplir con la siguiente condición

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{x}}$$

Datos:



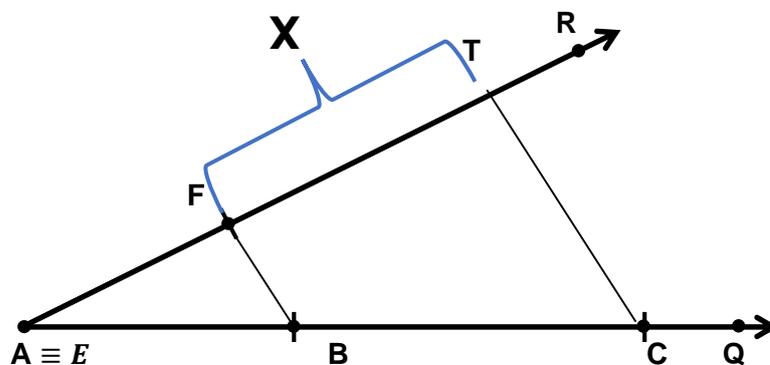
Trazamos un ángulo agudo y sobre él transportamos la medida de los segmentos dados partiendo del vértice del ángulo



Sobre una de ellas, transportamos las medidas de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  consecutivamente a partir del vértice del ángulo.

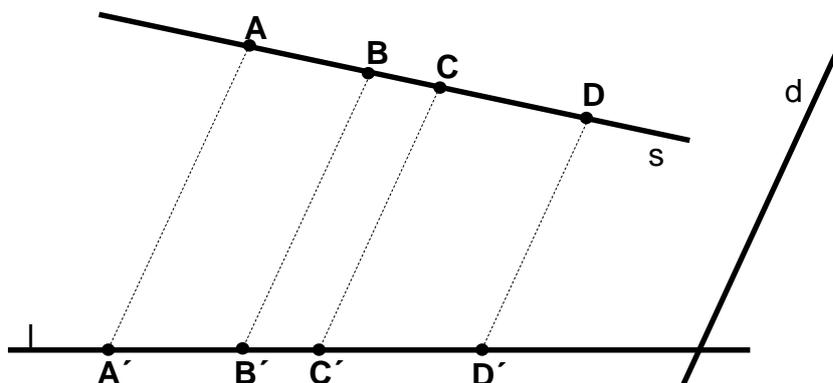
Sobre la otra semirrecta transportamos la medida de  $\overline{EF}$  a partir del origen

Unimos F con B y trazando una paralela por C obtenemos el punto T. El segmento TC es el cuarto proporcional buscado: X



Es decir:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{x}$

**Ejemplo 1:**



Teniendo en cuenta la dirección de la recta d y sus paralelas se sabe que:

$\overline{AB} = 1,2 \text{ cm}$  ,  $\overline{CD} = 2,1 \text{ cm}$  y que  $\overline{A'B'} = 1,6 \text{ cm}$ : calcular  $\overline{C'D'}$

Por el **TEOREMA DE THALES**:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$  , sustituyendo por los los datos  $\overline{C'D'}$  por x :

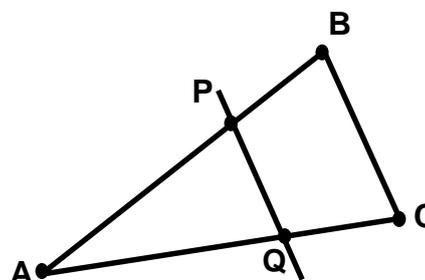
$$\frac{1,2}{2,1} = \frac{1,6}{C'D'}$$

$1,2 \times C'D = 2,1 \times 1,6$  por propiedad fundamental de las proporciones:

$$C'D' = \frac{2,1 \times 1,6}{1,2} \Rightarrow C'D' = 2,8$$

**Ejemplo 2:**

En el triángulo  $\triangle ABC$  las longitudes de los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  son respectivamente 15 cm y 24 cm. Si  $r \parallel \overline{BC}$  y la longitud de  $\overline{AQ}$  es 8 cm, calcular la longitud de  $\overline{AP}$ .



Aplicando el **TEOREMA DE THALES**:

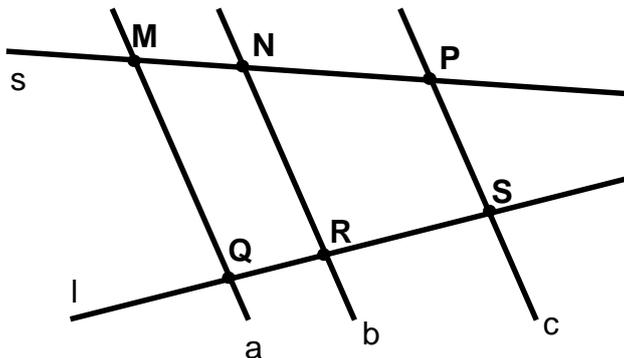
$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$  , y sustituyendo:  $\frac{8}{15} = \frac{x}{24}$  , por propiedad fundamental de las

proporciones:

$x \times 15 = 8 \times 24$ , y despejando  $x = \frac{8 \times 14}{15} \Rightarrow x = 12,8$ . Luego, la medida de  $\overline{AP}$  es 12,8cm

**Ejemplo 3:**

¿para cuáles de los siguientes conjuntos de valores resulta  $a \parallel b \parallel c$ ?



a) Long.  $\overline{MN} = 2$  cm  
 Long.  $\overline{NP} = 3$  cm  
 Long.  $\overline{QR} = 3$  cm

b) Long.  $\overline{MN} = 6$  cm  
 Long.  $\overline{NP} = 8$  cm  
 Long.  $\overline{QR} = 9$  cm  
 —

c) Long.  $\overline{MN} = 6,8$  cm  
 Long.  $\overline{NP} = 8,5$  cm  
 Long.  $\overline{QR} = 4,4$  cm  
 —

d) Long.  $\overline{MN} = 3,1$  cm  
 Long.  $\overline{NP} = 5,2$  cm  
 Long.  $\overline{QR} = 2,8$  cm  
 —

Para determinar para cuales de los conjuntos precedentes las rectas  $a$ ,  $b$  y  $c$  resultan paralelas debemos aplicar la propiedad recíproca del **TEOREMA DE THALES**. Luego verificamos para qué conjunto la proposición consecuencia de Thales se cumple, es decir:

Debe ser:  $\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{RS}}$ , y para ello:  $\overline{MN} \times \overline{RS} = \overline{NP} \times \overline{QR}$

a)  $2 \times 4 \neq 3 \times 3$  porque  $8 \neq 9$

b)  $6 \times 12 = 8 \times 9$  porque  $72 = 72$

c)  $6,8 \times 5,5 = 8,5 \times 4,4$  porque  $37,4 = 37,4$

d)  $3,1 \times 4,9 \neq 5,2 \times 2,8$  porque  $15,19 \neq 14,56$

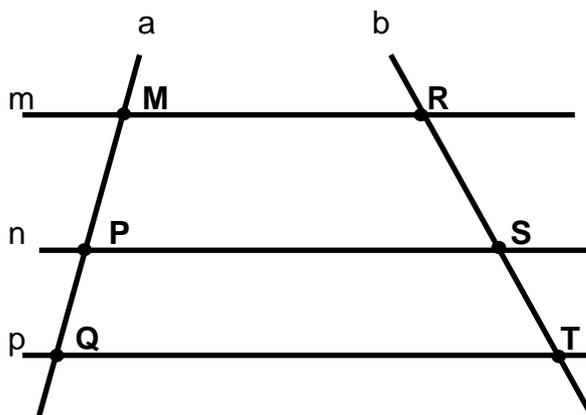
Luego, en los conjuntos b) y c)  $a \parallel b \parallel c$

y en los conjuntos a) y d) no son paralelas.

**Ejemplo 4:**

Las rectas  $m$ ,  $n$  y  $p$  de la figura con paralelas.

Calcular  $\overline{ST}$  si  $\overline{MP} = x - 1$  ;  $\overline{PQ} = 23 - x$  ;  $\overline{RS} = x + 4$  y  $\overline{RT} = 33$



Por Teorema de Thales :  $\frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}$ . Como de

$\overline{RT}$  conocemos su medida, debemos calcular la longitud de  $\overline{RS}$  para hallar por diferencia la longitud de  $\overline{ST}$ . Para ello aplicamos la propiedad 1 de las proporciones a la proporción anterior:

$$\frac{\overline{MP} + \overline{PQ}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{RS} + \overline{ST}}{\overline{RS}} \Rightarrow \frac{\overline{MP} + \overline{PQ}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{RS}}$$

sustituyendo :  $\frac{x - 1 + 23 - x}{x - 1} = \frac{33}{x + 4} \Rightarrow \frac{22}{x - 1} = \frac{33}{x + 4}$

Por propiedad fundamental de las proporciones:

$22 \times (x + 4) = 33 \times (x - 1)$  ; expresión que nos permite calcular  $x$

$22x + 22 \times 4 = 33x - 33 \times 1$  ; por propiedad distributiva

$22x + 88 = 33x - 33$

$22x - 33x = -33 - 88$  , por pasaje de términos de un miembro a otro

$-11x = -121$

multiplicando ambos miembros por  $\left(-\frac{1}{11}\right)$ :

$$-\frac{1}{11} \times (-11x) = -\frac{1}{11} \times (-121) \Rightarrow x = 11$$

Si  $x = 11 \Rightarrow \overline{RS} = 11 + 4 = 15$  por ser  $\overline{RS} = x + 4$  según datos

Pero  $\overline{ST} = \overline{RT} - \overline{RS}$ , luego  $\overline{ST} = 33 - 11 = 22 \therefore \overline{ST} = 22$

## EJERCITACIÓN PROPORCIONES

1) Calcular  $x$  en :

$$a) \frac{x}{3} = \frac{21}{11} \quad ; \quad b) \frac{2}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{8}}{x} \quad ; \quad c) \frac{1}{x} = \frac{x}{1} \quad ; \quad d)$$

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{x}{\frac{2}{7} \times \frac{2}{3}}$$

2) Calcular  $x$  en :

$$a) \frac{0.35 \times (-9)}{x} = \frac{x}{(-5)^2 \times (-4-1)} \quad ; \quad b) \frac{-0.05 \times \sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}}{1.5 + \frac{1}{9} \times \frac{3}{2}} = \frac{x}{(0.3 \div 0.34)^{-1}}$$

$$c) \frac{x + \frac{1}{2}}{(0.3)^{-1} \times \frac{1}{5}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \quad ; \quad d) \frac{5}{3-x} = \frac{3}{2x}$$

3) Resolver los siguientes problemas:

a) Se sabe que la suma de dos números es **20** y que el primer número es al segundo como **2** es a **3**. ¿cuáles son los números?

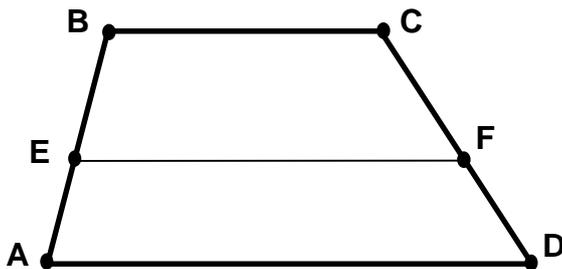
b) Sabemos que dos números, cuya diferencia es **10**, guardan entre si la relación  $\frac{5}{3}$ . Queremos averiguar cuales son los números.

c) Los promedios de vida de la tortuga y del elefante, cuya suma es **100** años, guardan entre si la relación  $\frac{2}{3}$ . Calcular dichos promedios de vida.

d) El nº de goles a favor de Argentina, en el campeonato mundial de fútbol de 1986, sobre el nº de goles en contra, es **2,285714**. Si se sabe que la diferencia entre ambos números de goles es **9**, ¿cuál es el nº de goles a favor y cuál el nº de goles en contra?

4) Siendo  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  dos segmentos consecutivos contenidos en una recta, tales que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{7}{4}$ . Halle las razones  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ,  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  y  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ .

5)



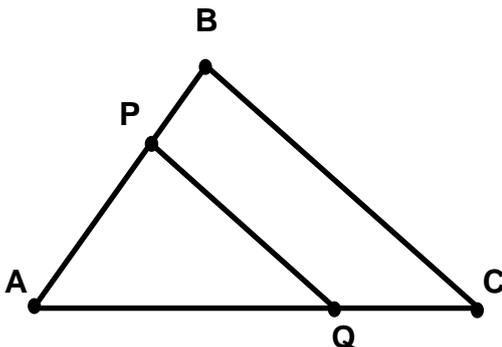
ABCD trapecio,

$$\overline{EF} \parallel \overline{BC}, \overline{AE} = x + 1 \text{ cm}, \overline{EB} = 2x - 3,$$

$$\overline{CF} = 11 \text{ cm}, \overline{FD} = 8 \text{ cm}$$

Calcular  $\overline{AB}$

6)



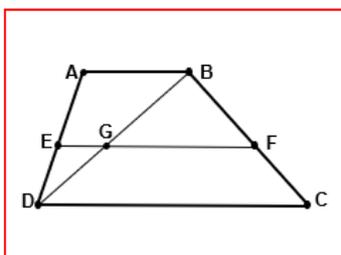
Nos informan que:

$$\overline{AP} = 2x + 4, \quad \overline{PB} = x + 2$$

$$\overline{AQ} = 3x + 1, \quad \overline{QC} = x + 3 \quad \text{y} \quad \overline{AC} = 24 \text{ cm}$$

¿Es  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ? Justificar la respuesta.

7

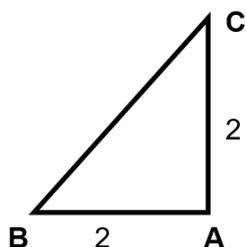


$ABCDE$  trapecio ;  $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{3}{4}, \overline{AD} = 8, \overline{BC} = 12$$

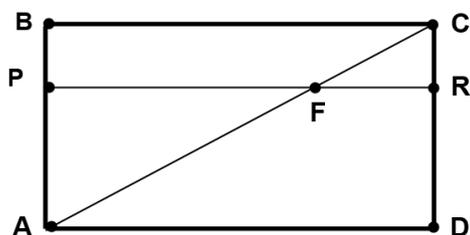
Calcular  $\overline{AE}$ ,  $\overline{ED}$ ,  $\overline{BF}$  y  $\overline{FC}$

8)



Determinar la longitud de la hipotenusa y el área de un triángulo de la misma forma que el  $\triangle ABC$  que tenga por longitud de un cateto a  $\sqrt{2}$

9)



En el rectángulo  $ABCD$  de la figura,  $\overline{AD} \parallel \overline{PR}$  si  $\overline{FC} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{RF} = 4 \text{ cm}$  y  $\overline{AF} = 10 \text{ cm}$ , ¿cuál es el perímetro del  $ABCD$ ?

- 8) Dos lados de un triángulo miden **12** y **21** metros respectivamente. La bisectriz del ángulo comprendido entre ellos, divide al tercer lado (opuesto al ángulo dado) en dos segmentos de manera que uno es el doble del otro menos **1,75 m**. ¿Cuánto mide el tercer lado?
- 9) De un triángulo  $ABC$  se sabe que lado  $AB = 18\text{cm}$ , lado  $AC = 13\text{cm}$  y que perímetro del  $ABC$  vale  $41,5\text{cm}$ . Si la bisectriz del ángulo exterior al ángulo interior  $B$  corta a la prolongación del lado  $AC$  en el punto  $P$ , ¿cuánto mide  $AP$ ?
- 10) Complete sobre la línea punteada con **SI** o **NO** de modo que resulten sentencias verdaderas.

- ✓ Si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo corta a la prolongación del lado opuesto, entonces la bisectriz del ángulo

exterior opuesto por el vértice al exterior dado.....corta a la prolongación del lado opuesto.

- ✓ En un triángulo rectángulo isósceles las bisectrices de los ángulos exteriores al recto..... cortan a la prolongación de la hipotenusa.

### RESPUESTAS

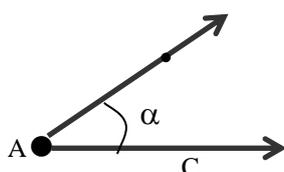
- 1) a)  $\frac{21}{11}$  ; b) 1 ; c)  $x = \pm \frac{1}{4}$  ; d)  $\frac{25}{9}$
- 2) a)  $\pm 20$  ; b)  $-\frac{2}{81}$  ; c)  $-\frac{1}{5}$  ; d)  $\frac{9}{13}$
- 3) a) 8 y 15 ; b) 25 y 15 ; c) 40 y 60 ; d) 16 y 7
- 4)  $\frac{11}{7}$  ,  $\frac{11}{4}$  y  $\frac{4}{7}$ .
- 5) 19 cm
- 6) sí
- 7)  $\overline{AE} = \frac{24}{7}$  ,  $\overline{ED} = \frac{32}{7}$  ,  $\overline{BF} = \frac{36}{7}$  ,  $\overline{FC} = \frac{48}{7}$
- 8) Hip = 2 ; Área = 2
- 9) Perímetro = 42 cm
- 10) 19,25 m
- 11) Rta.: 31,2cm
- 12) Rta.: en ambos casos va **NO**

## GEOMETRÍA EUCLIDIANA

- I. Ángulos
- II. Polígonos
- III. Circunferencia

### I.a ÁNGULOS

Un ángulo es un ente geométrico que se forma a partir de dos rectas que se cortan entre sí. También puede decirse que un ángulo es la superficie comprendida entre dos semirrectas que comparten un mismo vértice.



Punto **A**: vértice

Semirrectas  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  : lados

#### Notaciones:

$\widehat{BAC}$  ;  $\hat{A}$  ;  $\hat{\alpha}$

Medida o amplitud del  $\widehat{BAC}$  :  $|\widehat{BAC}|$

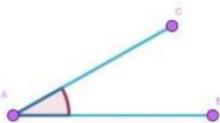
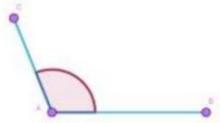
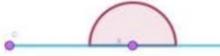
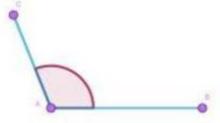
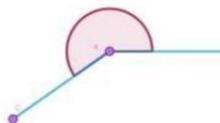
$|\hat{A}|$  = Medida de  $\hat{A}$

$|\hat{\alpha}|$  = Medida de  $\hat{\alpha}$

#### Según su abertura en grados

Ángulo nulo	Es aquel formado por dos líneas que coinciden en su vértice y en sus extremos, por lo tanto, su abertura es de $0^\circ$ .
<u>Ángulo agudo</u>	Es aquel con una abertura de vértice mayor de $0^\circ$ y menor de $90^\circ$ .
<u>Ángulo recto</u>	Se encuentra conformado por dos semirrectas cuya abertura de vértice es de $90^\circ$ .

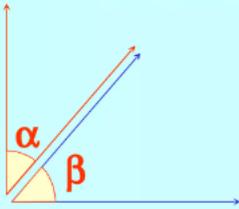
<u>Ángulo obtuso</u>	Es aquel cuya abertura de vértice es mayor de $90^\circ$ y menor de $180^\circ$ .
<u>Ángulo llano</u>	Es aquel constituido por dos semirrectas con un vértice de $180^\circ$ de abertura.
Ángulo oblicuo	También denominado reflejo o cóncavo, es aquel que posee un vértice de abertura superior de $180^\circ$ y menor de $360^\circ$
Ángulo perigonal o de un giro	También llamado ángulo completo, es aquel que tiene una abertura de $360^\circ$ .

Clasificación	Característica	Representación gráfica
<b>Ángulo nulo</b>	$\alpha = 0^\circ$	
<b>Ángulo agudo</b>	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
<b>Ángulo recto</b>	$\alpha = 90^\circ$	
<b>Ángulo obtuso</b>	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
<b>Ángulo llano</b>	$\alpha = 180^\circ$	
<b>Ángulo convexo</b>	$0^\circ < \alpha < 180^\circ$	
<b>Ángulo cóncavo</b>	$\alpha > 180^\circ$	

Fuente: <https://www.matematicas-divertidas-con-flor.es/tipos-de-angulos/>

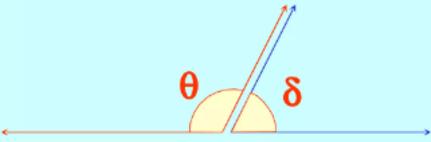
### CLASIFICACIÓN SEGÚN SU SUMA

**a) ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS**



$\alpha + \beta = 90^\circ$

**b) ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS**

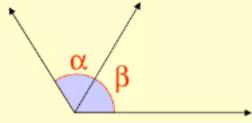


$\theta + \delta = 180^\circ$

Fuente: <https://es.slideshare.net/ALICIAMALCA/los-angulos-y-su-clasificacin>

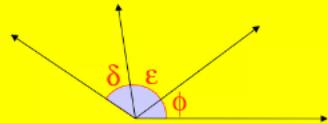
### CLASIFICACIÓN SEGÚN SU POSICIÓN

**a) ÁNGULOS ADYACENTES**



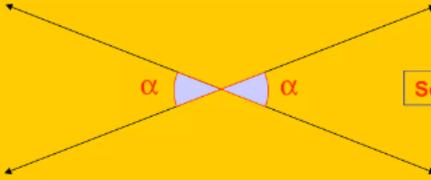
Un lado común

**b) ÁNGULOS CONSECUTIVOS**



Puede formar más ángulos

### ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

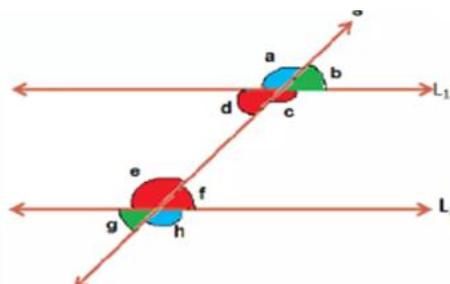


Son congruentes

Fuente: <https://es.slideshare.net/ALICIAMALCA/los-angulos-y-su-clasificacin>

## ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

Se determinan dos zonas: la interna que se encuentra entre las paralelas y las externas



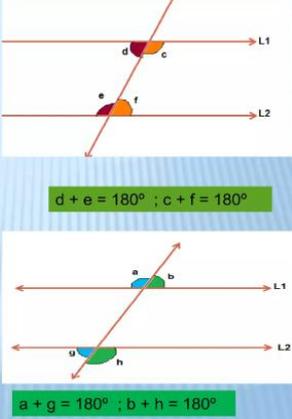
Fuente: [https://es.slideshare.net/masquenumeros/angulos-entre-rectas-parallelas-19387674?from\\_search=14](https://es.slideshare.net/masquenumeros/angulos-entre-rectas-parallelas-19387674?from_search=14)

- **INTERNOS:** Los que están dentro de las paralelas :  $d, c, e$  y  $f$
- **EXTERNOS:** los que se encuentran fuera de las paralelas:  $a, b, g$  y  $h$

**ÁNGULOS CONJUGADOS**  
 Son los que están a un mismo lado de la secante. Los ángulos conjugados son suplementarios.

**INTERNOS:**  
 Son los ángulos:  $d$  y  $e$ ;  $c$  y  $f$

**EXTERNOS:**  
 Son los ángulos:  $a$  y  $g$ ;  $b$  y  $h$



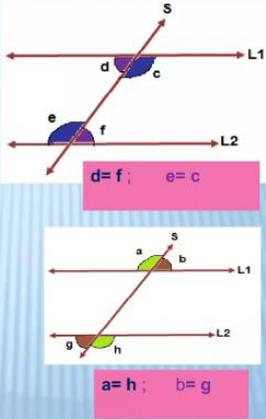
$d + e = 180^\circ$  ;  $c + f = 180^\circ$

$a + g = 180^\circ$  ;  $b + h = 180^\circ$

**ÁNGULOS ALTERNOS:**  
 Son aquellos ángulos que se encuentran a ambos de la secante. Los ángulos alternos son iguales.

**INTERNOS:** Son los ángulos  $d$  y  $f$ ;  $e$  y  $c$

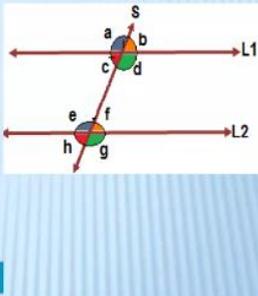
**EXTERNOS:** Son los ángulos  $a$  y  $h$ ;  $b$  y  $g$



$d = f$  ;  $e = c$

$a = h$  ;  $b = g$

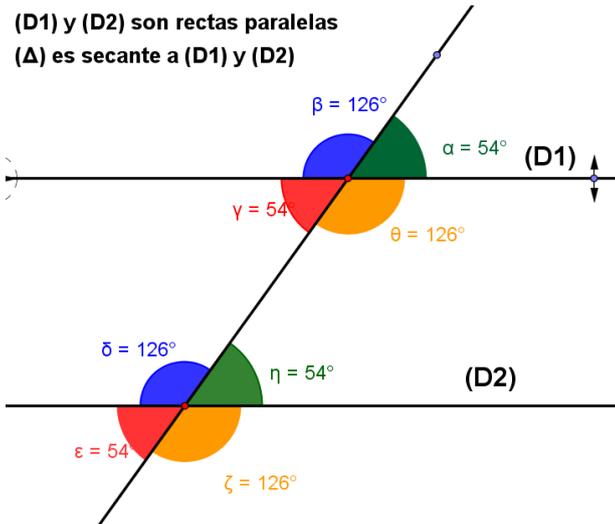
**ÁNGULOS CORRESPONDIENTES**  
 Son aquellos ángulos uno interno y otro externo o viceversa que se encuentran a un mismo lado de la secante. Los ángulos correspondientes son iguales.



$a = e$  ;  $c = h$  ;  $b = f$  ;  $d = g$

[https://es.slideshare.net/masquenumeros/angulos-entre-rectas-paralelas-19387674?from\\_search=14](https://es.slideshare.net/masquenumeros/angulos-entre-rectas-paralelas-19387674?from_search=14)

Ejemplo:

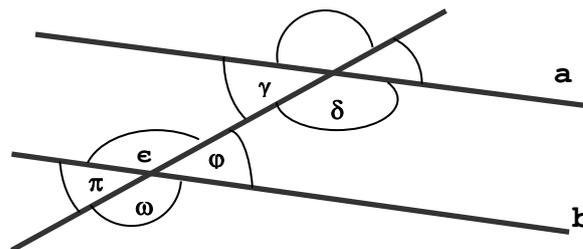


Fuente: <http://www.webquestcreator2.com/majwg/ver/ver/60471>

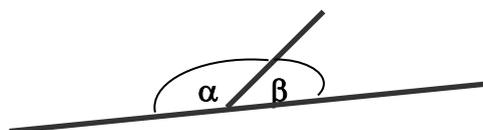
EJERCITACION

- a) el complementario de  $\hat{\alpha}$
- b) El suplementario de  $\hat{\beta}$
- c) la amplitud de un ángulo adyacente a  $\hat{\alpha}$
- d) la amplitud de cada ángulo obtenido al trazar la bisectriz de  $\hat{\alpha}$ .

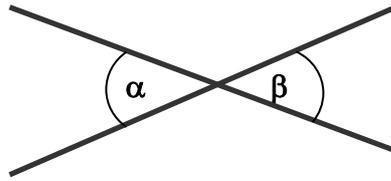
31) Si  $\hat{\alpha} = 29^{\circ}21'13''$ , calcular los demás ángulos sabiendo que  $a \parallel b$ .



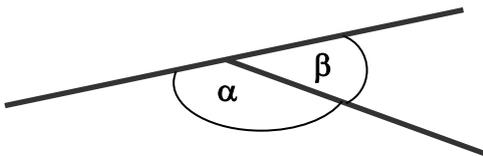
32) Calcular  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  sabiendo que la amplitud de  $\hat{\alpha}$  es el triple de la de  $\hat{\beta}$ .



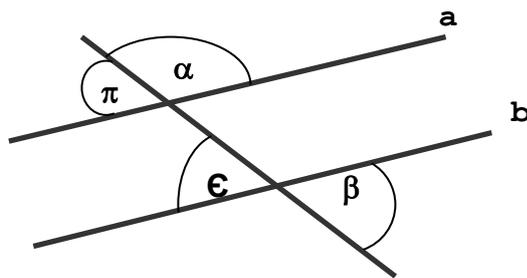
33) Calcular "x" si  $\hat{\alpha} = 2x - 4^{\circ}$  y  $\hat{\beta} = x + 28^{\circ}$



34) Calcular  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  si  $\hat{\alpha} = 2x + 58^\circ$  y  $\hat{\beta} = x + 14^\circ$

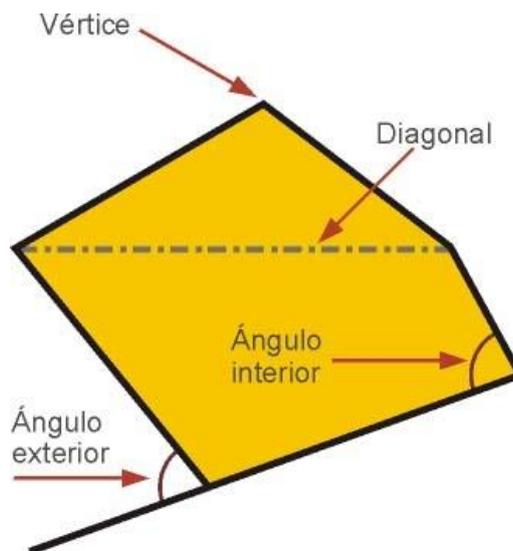


35) Calcular  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\epsilon}$ , y  $\hat{\pi}$  si  $\hat{\alpha} = 3x + 14^\circ$  y  $\hat{\beta} = x - 2^\circ$



## II. POLÍGONOS

Un polígono es un ente geométrico **plano**, compuesta por un conjunto de segmentos de recta llamados **lados**, conectados de manera tal que encierren y delimiten una región del **plano**, la unión entre segmentos se denominan vértices.



Clasificación de polígonos según sus lados

Número de lados	Nome	Polígono	
		Regulares	Irregulares
3 lados	triángulos		
4 lados	cuadriláteros		
5 lados	pentágono		
6 lados	hexágono		
7 lados	heptágono		
8 lados	octógono		
9 lados	eneágono		
10 lados	decágono		

**Suma de los ángulos interiores de un polígono**

s.a.  $i = 180(n-2)$

donde  $n$  es el número de lados del polígono.

**Suma de los ángulos exteriores de un polígono:  $360^\circ$**

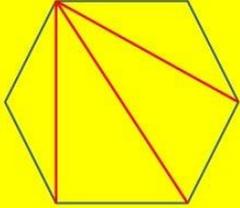
**Número de diagonales de un polígono:**

5. Número de diagonales de un vértice.

**$d = n - 3$**

En un hexágono ( $n = 6$ ) se puede trazar de uno de sus vértices:

$d = 6 - 3 = 3$  diagonales

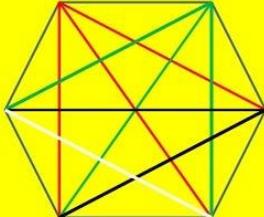


6. Número total de diagonales de un polígono.

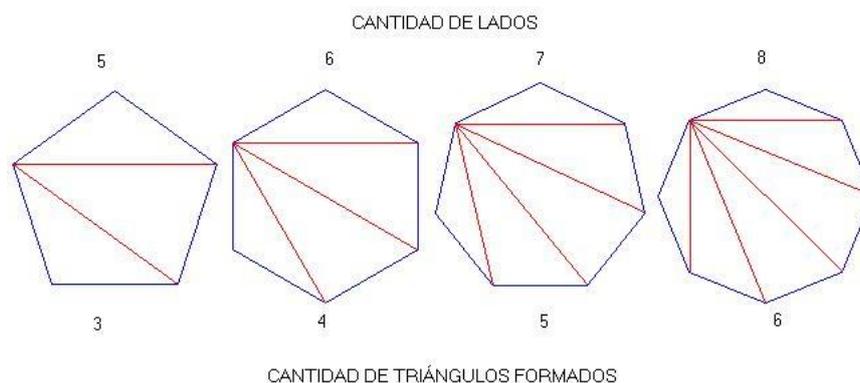
**$N_T = \frac{n(n-3)}{2}$**

En un hexágono ( $n = 6$ ) el número total de diagonales será:

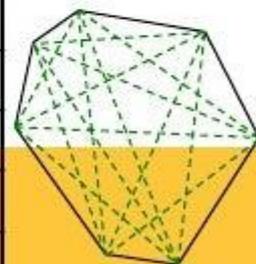
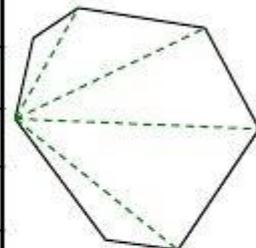
$N_T = \frac{6(6-3)}{2} = 9$  diagonales en total



**Número de triángulos de un polígono:  $n-2$**



Polígono	Número de lados	Número de triángulos	Suma de los ángulos interiores	Número de diagonales
Triángulo	3	1	$180^\circ$	0
Cuadrilátero	4	2	$2 \cdot 180^\circ$	2
Pentágono	5	3	$3 \cdot 180^\circ$	5
Hexágono	6	4	$4 \cdot 180^\circ$	9
Heptágono	7	5	$5 \cdot 180^\circ$	14
Octógono	8	6	$6 \cdot 180^\circ$	20
Eneágono	9	7	$7 \cdot 180^\circ$	27
Decágono	10	8	$8 \cdot 180^\circ$	35
Undecágono	11	9	$9 \cdot 180^\circ$	44
Dodecágono	12	10	$10 \cdot 180^\circ$	54
.....	.....	.....	.....	.....
Polígono de n lados	n	n-2	$(n-2) \cdot 180^\circ$	$n(n-3)/2$



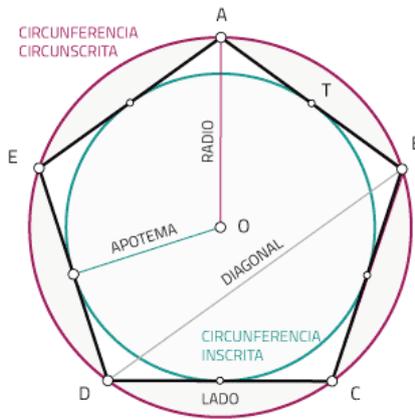
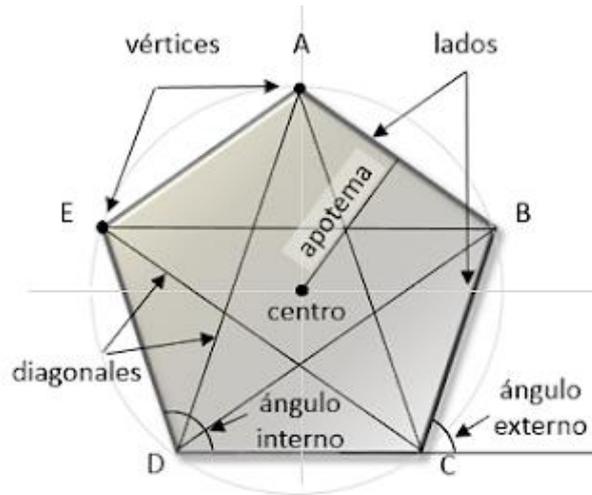
## Polígono regular

Se inscriben en una circunferencia

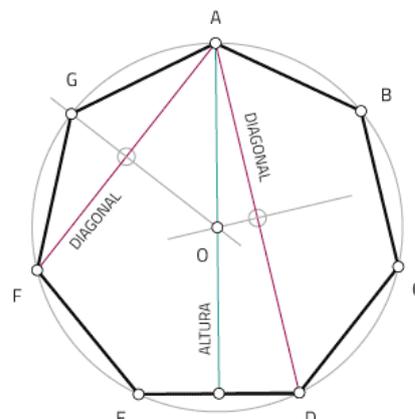
- Todos sus ángulos interiores son iguales entre sí
- Todos sus ángulos exteriores son iguales entre sí
- Todos los lados son iguales

Diagonales: unen dos vértices no consecutivos

Apotema: perpendiculares al lado trazada desde el centro



ELEMENTOS DE UN POLÍGONO REGULAR



LAS MEDIATRICES DE LAS DIAGONALES Y LAS ALTURAS SE CORTAN EN EL CENTRO DEL POLÍGONO

Fuente: <https://dibujotecni.com/geometria-plana/poligonos-regulares/>

### Ángulo interior de un polígono regular

#### 4. Ángulo interno y central ( solo en polígonos regulares)

$$m \angle_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

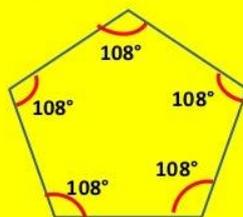
$$m \angle_c = \frac{360^\circ}{n}$$

**Ejemplo:**

1. Hablemos el ángulo interno de un pentágono. (n = 5)

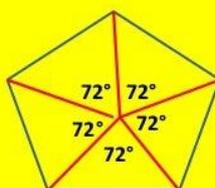
$$m \angle_i = \frac{180^\circ(5-2)}{5}$$

$$m \angle_i = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$



El ángulo central será:

$$m \angle_c = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

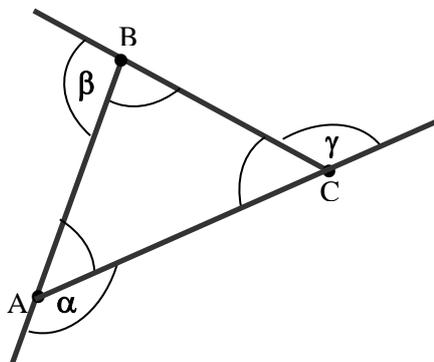


$$\text{Superficie} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{Apotema}}{2}$$

Fuente: <https://es.slideshare.net/huamanipillaca/poligonos-14019757>

## II. a TRIÁNGULOS

### PROPIEDADES



1. **Suma de los ángulos interiores igual a  $180^\circ$**

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

2. **Suma de los ángulos exteriores igual a  $360^\circ$**

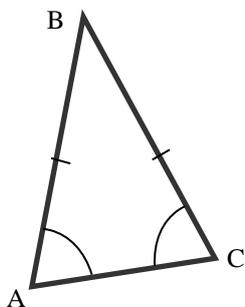
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 360^\circ$$

- 3) Cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

$$\hat{\alpha} = \hat{B} + \hat{C} \quad ; \quad \hat{\beta} = \hat{A} + \hat{C} \quad ; \quad \hat{\gamma} = \hat{A} + \hat{B}$$

- 4) Cada lado es menor que la suma de los otros dos.

(Si esto no se cumple, no existe triángulo).



$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \quad ; \quad \overline{AB} < \overline{BC} + \overline{AC} \quad ; \quad \overline{BC} < \overline{CA} + \overline{AB}$$

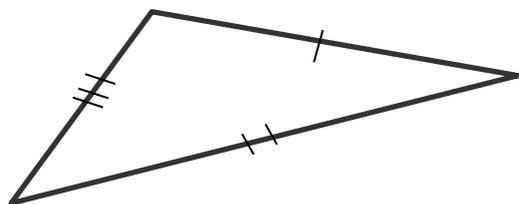
- 5) Al mayor lado se le opone el mayor ángulo (idem con el menor) .

$$\text{Si } \hat{A} < \hat{C} < \hat{B} \text{ entonces } \overline{BC} < \overline{AB} < \overline{AC}$$

- 6) A lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y a la inversa.

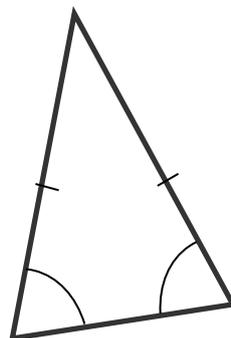
$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{BC} \text{ entonces } \hat{A} = \hat{C}, \text{ y recíprocamente}$$

## CLASIFICACIÓN POR SUS LADOS



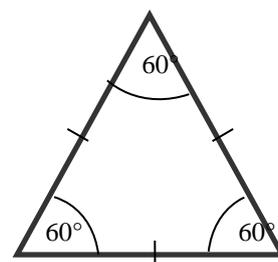
### ESCALENO

(lados no congruentes)



### ISÓSCELES

(dos lados congruentes y dos ángulos congruentes)

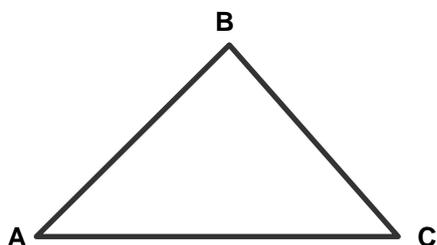


### EQUILÁTERO

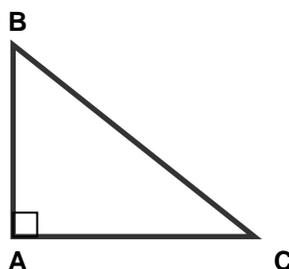
(tres lados congruentes y tres ángulos congruentes)

Observación: Todo triángulo equilátero es isósceles.

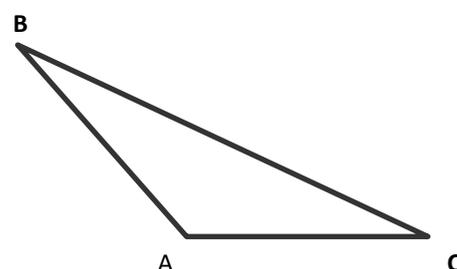
## CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS ÁNGULOS



**ACUTÁNGULO**  
(tres ángulos agudos)



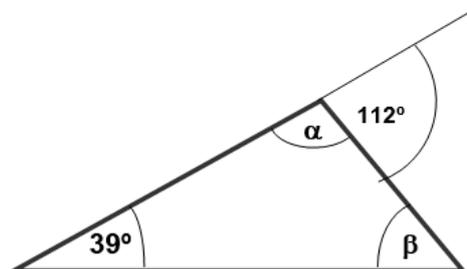
**RECTÁNGULO**  
(1 ángulo recto)  
**EJERCICIOS**



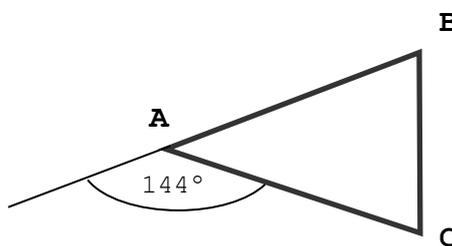
**OBTUSÁNGULO**  
(1 ángulo obtuso)

**EJERCITACIÓN**

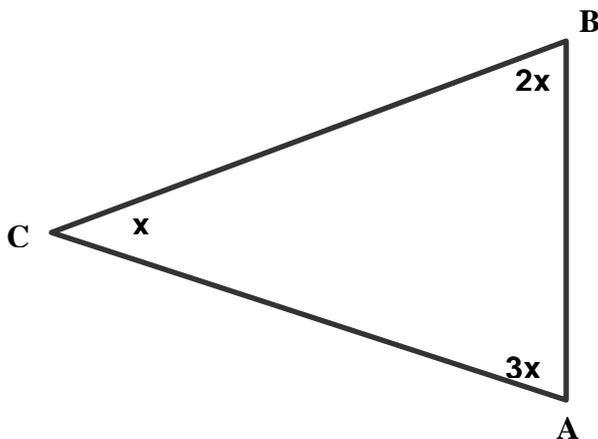
36) Hallar  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$



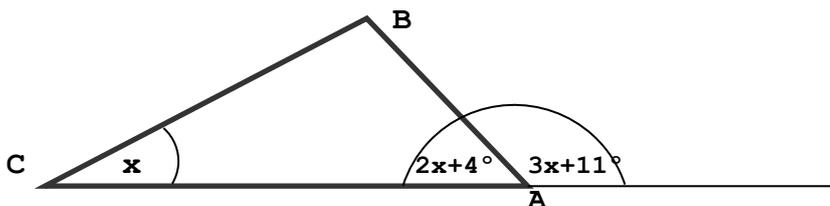
37) Hallar  $\hat{C}$  y  $\hat{B}$ , si  $\overline{AB} = \overline{AC}$



38) Hallar  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  con los datos de la figura.



39) Hallar  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  (ángulos interiores) con los datos de la figura.



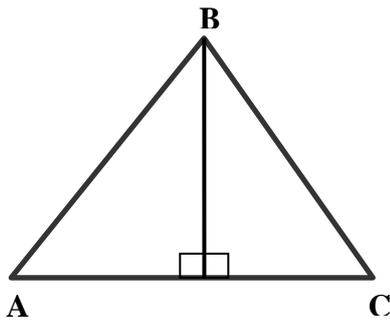
40)  $\triangle ABC$  es rectángulo en  $\hat{A}$ , y  $\hat{B}$  es las cuatro quintas partes de  $\hat{C}$ , hallar  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ .

## ALTURAS DEL TRIÁNGULO

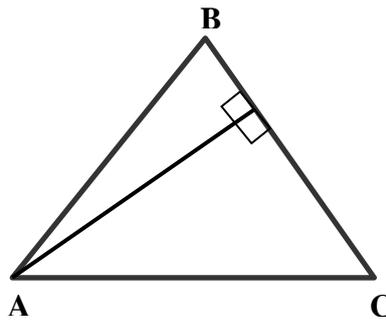
Cada triángulo tiene tres alturas, una para cada uno de sus lados.

Altura correspondiente a un lado: es el segmento de perpendicular al lado, que tiene un extremo en el vértice opuesto y otro en el lado o su prolongación.

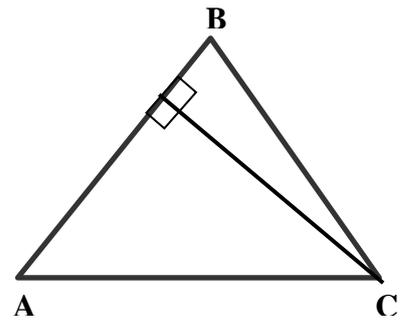
a) En un acutángulo:



$h_{\overline{AC}}$   
(altura correspondiente al lado  $\overline{AC}$ )

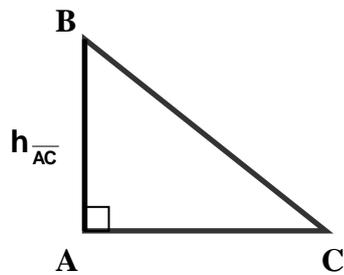


$h_{\overline{BC}}$   
(altura correspondiente al lado  $\overline{BC}$ )

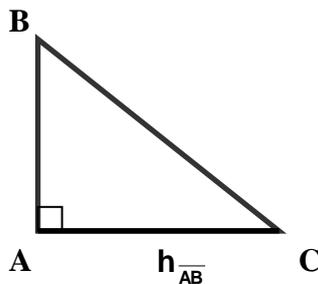


$h_{\overline{AB}}$   
(altura correspondiente al lado  $\overline{AB}$ )

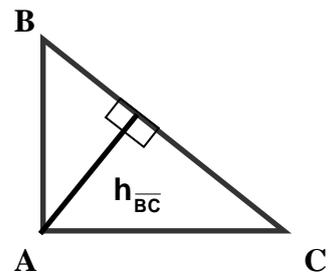
b) En un triángulo rectángulo (cada cateto es la altura del otro).



$h_{\overline{AC}}$

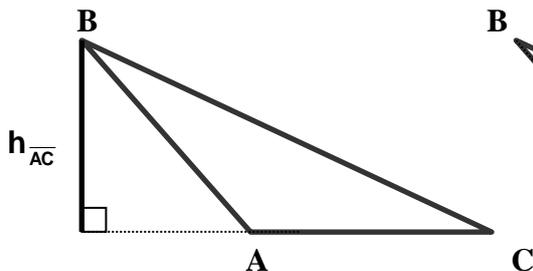


$h_{\overline{AB}}$

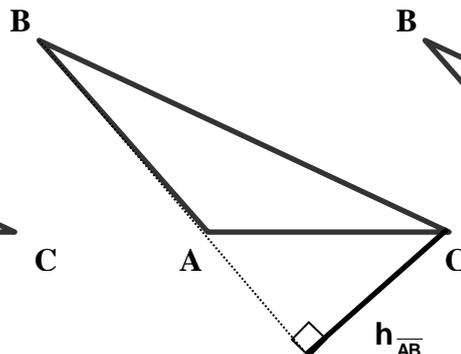


$h_{\overline{BC}}$

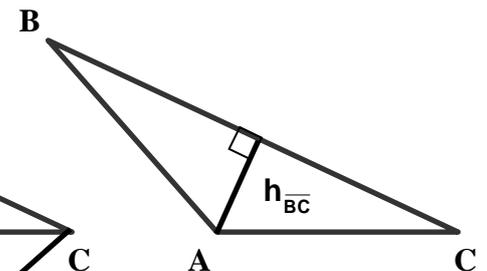
c) En un triángulo obtusángulo (hay dos alturas exteriores al triángulo).



$h_{\overline{AC}}$



$h_{\overline{AB}}$



$h_{\overline{BC}}$

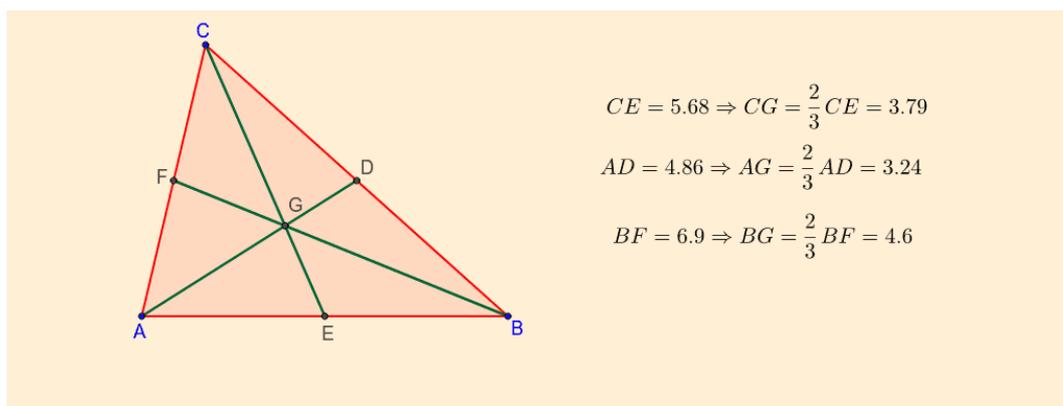
## MEDIANAS

### MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO

La **mediana** es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

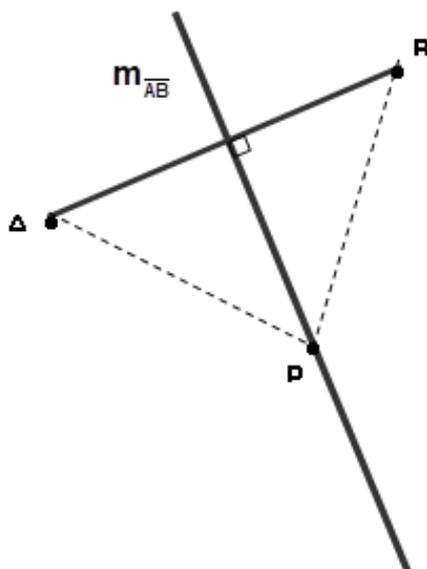
#### Propiedades

- Todo triángulo tiene **tres** medianas.
- Las tres medianas de un triángulo se cortan en un único punto, llamado **baricentro** o **centroide**.
- El baricentro es el **centro de gravedad** del triángulo.
- El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuyas medidas están en la razón 2 : 1 y que significa que uno de esos segmentos es el **doblo** del otro.

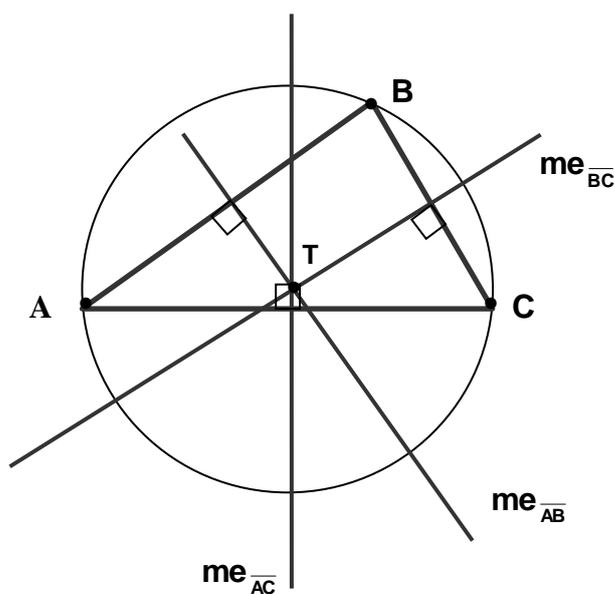


## MEDIATRICES

La mediatriz de un segmento es una perpendicular al mismo en su punto medio, cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento ( $\overline{PB} = \overline{PA}$ , para cualquier ubicación de **P** sobre la mediatriz).



Cada lado del triángulo tiene su mediatriz.



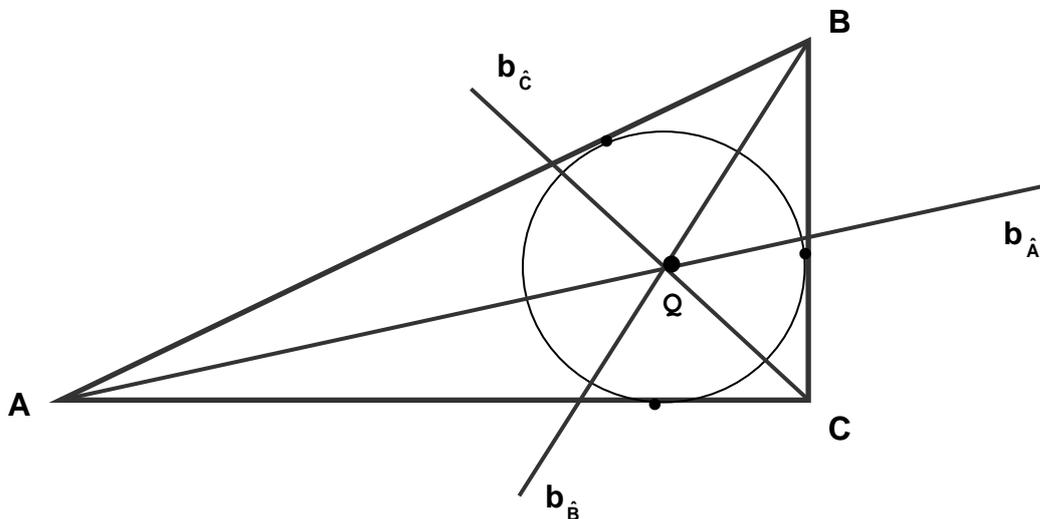
Las tres mediatrices concurren en un punto que equidista de los vértices; luego es el centro de una circunferencia circunscripta al triángulo). El punto **T** se llama **CIRCUNCENTRO**.

## BISECTRICES

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos interiores.

**Propiedades**

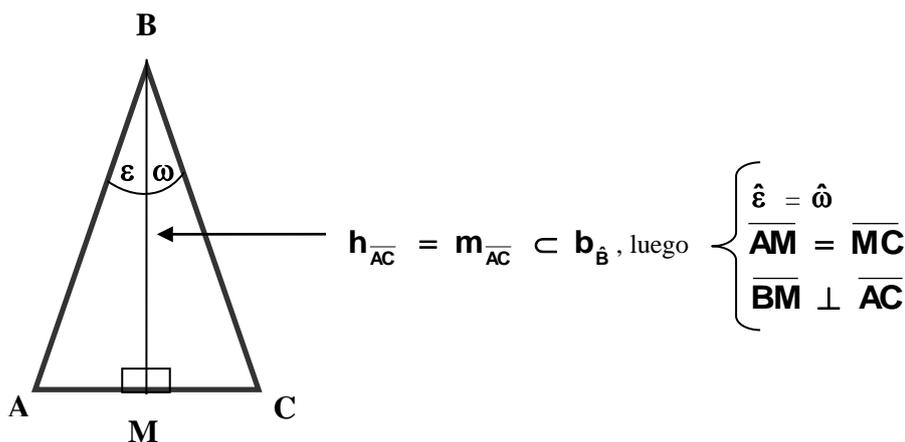
- El número de bisectrices de un triángulo es **tres**.
- Las bisectrices de un triángulo se cortan en un único punto llamado **incentro**.
- El incentro de un triángulo **equidista de los lados** del triángulo.
- El incentro **siempre** es **interior** al triángulo.
- Con centro en el incentro se puede trazar una circunferencia que “pasa” por **los tres lados** del triángulo, “tocando” a cada lado en **un punto**. Es decir que los lados resultan **tangentes** a la circunferencia. Circunferencia llamada **inscrita**.



El punto **Q** se llama **INCENTRO**.

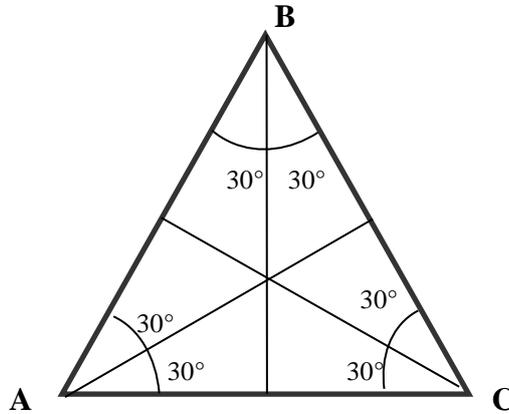
**TRIÁNGULO ISÓSCELES:** Tiene dos lados y dos ángulos iguales

La altura correspondiente a la base (lado distinto) es también mediatriz y mediana del lado; también es bisectriz del ángulo opuesto a la base.

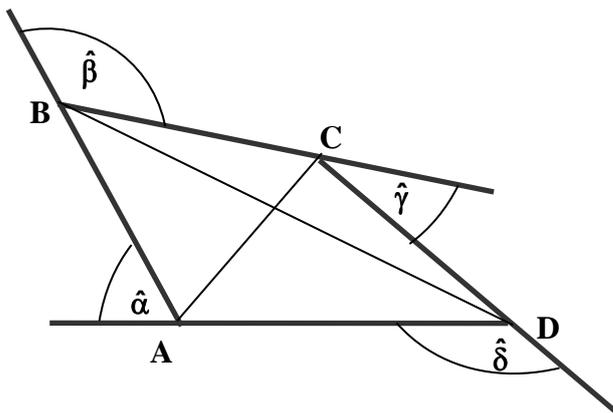


Los triángulos rectángulos  $\hat{A}MB$  y  $\hat{C}MB$  son iguales

**TRIÁNGULO EQUILÁTERO:** cada altura es también mediana y bisectriz y eje de simetría.



### CUADRILÁTEROS CONVEXOS



$\overline{BC}$  y  $\overline{AC} \rightarrow$  DIAGONALES

■ **PROPIEDADES**

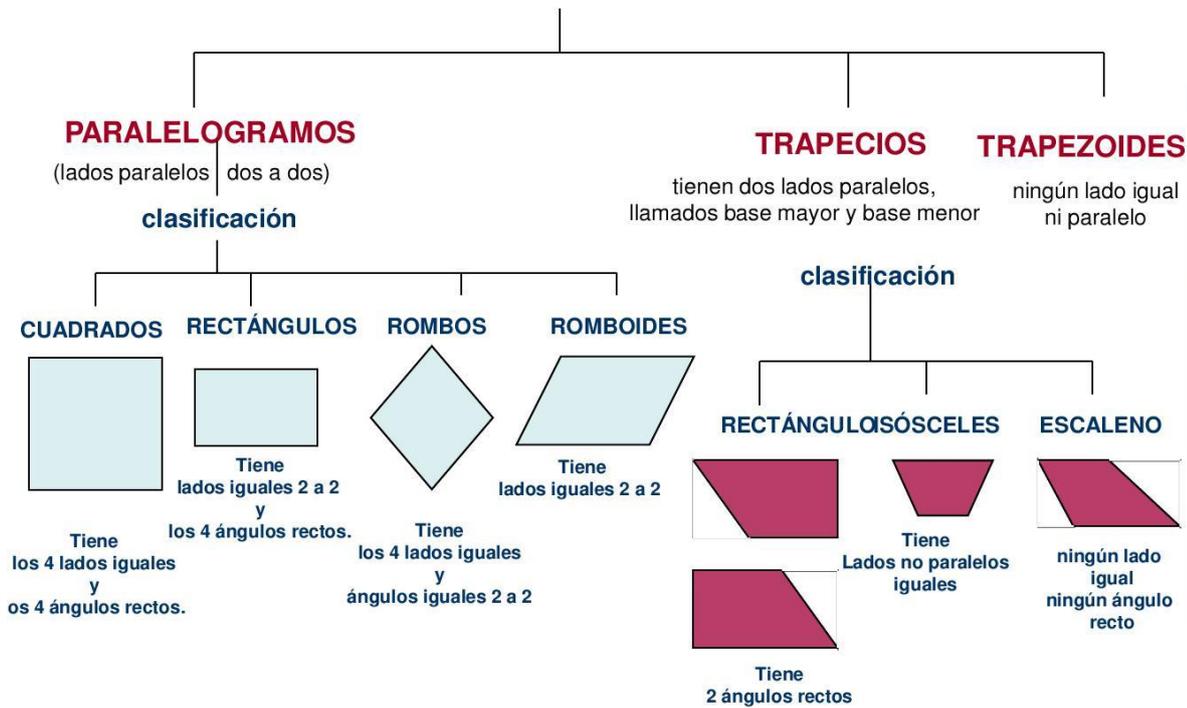
- 1)  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$   $\longrightarrow$  SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES
- 2)  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} = 360^\circ$   $\longrightarrow$  SUMA DE ÁNGULOS EXTERIORES
- 3) Cada lado es menor que la suma de los demás.

## CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

### CUADRILÁTEROS

polígonos con cuatro lados, cuatro ángulos y cuatro vértices

#### clasificación



## PARALELOGRAMO

Cuadrilátero con pares de lados y ángulos iguales. Son paralelogramos, el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide

### PROPIEDADES

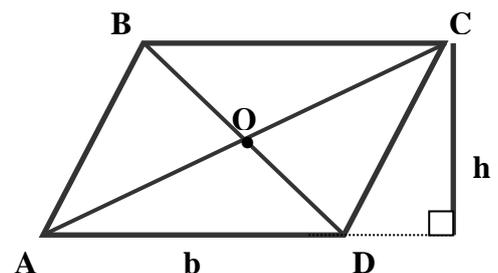
1) lados opuestos iguales

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} = \overline{AD}$$

2) ángulos opuestos iguales

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ y } \hat{B} = \hat{D}$$

3) ángulos no opuestos, suplementarios



$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ ; \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ ; \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ ; \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$$

4) diagonales que se cortan una a la otra en partes iguales

$$\overline{AO} = \overline{OC} \text{ y } \overline{BO} = \overline{OD}$$

## ROMBO

Además de tener pares de lados y ángulos iguales, sus diagonales son perpendiculares los rombos tienen las cuatro propiedades del paralelogramo y además:

5) diagonales perpendiculares

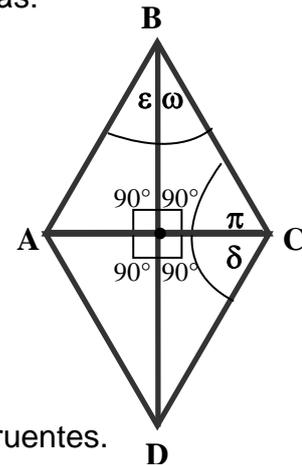
$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

6) diagonales bisectrices de los ángulos

$$\hat{\epsilon} = \hat{\omega} ; \hat{\pi} = \hat{\delta}$$

Cada diagonal es eje de simetría.

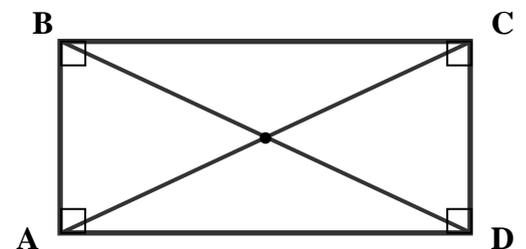
Los triángulos rectángulos  $\hat{AOB}$ ,  $\hat{BOC}$ ,  $\hat{COD}$  y  $\hat{DOA}$  son congruentes.



## RECTÁNGULO

Las cuatro propiedades de los paralelogramos y además:

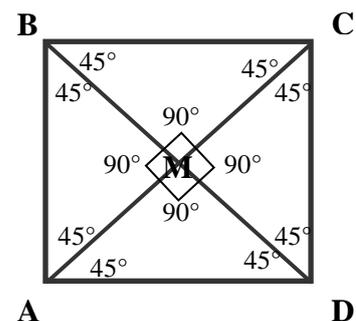
Diagonales son iguales



## CUADRADO

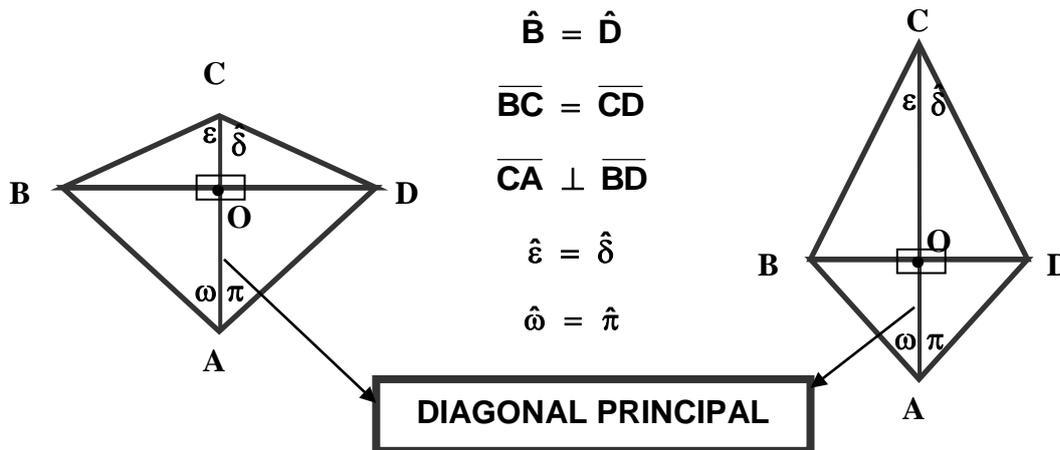
Tiene cuatro lados iguales, cuatro ángulos rectos, las diagonales son congruentes, perpendiculares, bisectrices de los ángulos y ejes de simetría.

$$\overline{AM} = \overline{MC} \text{ y } \overline{BM} = \overline{MD}$$



## ROMBOIDE

Tiene dos pares de lados no paralelos, congruentes.



### PROPIEDADES

- 1) los ángulos en cuyo vértice se cortan lados no congruentes, son congruentes (no así los otros dos ángulos).

$$\hat{B} = \hat{D}$$

- 2) la diagonal principal corta a la otra en partes congruentes.

$$\overline{BO} = \overline{OD}$$

- 3) la diagonal principal es perpendicular a la otra.

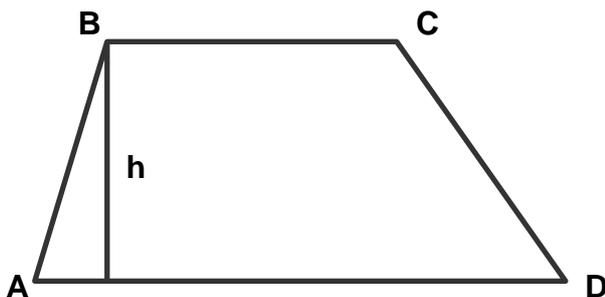
$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

- 4) la diagonal principal es bisectriz.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\delta} \text{ y } \hat{\omega} = \hat{\pi}$$

### TRAPECIO

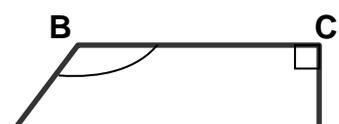
Tiene un par de lados paralelos, llamados **BASES**.



$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$$

**TRAPECIO RECTO O RECTÁNGULO:** tiene un lado perpendicular a las bases.



$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

- **TRAPECIO ISÓSCELES:** tiene dos lados congruentes (son los lados no paralelos).

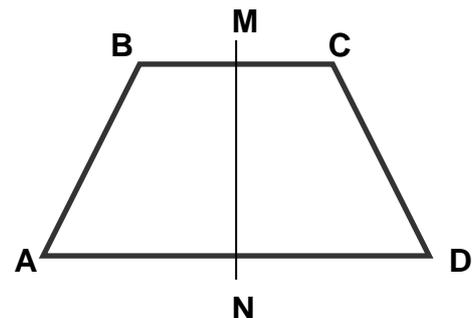
$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$

$$\hat{A} = \hat{D}$$

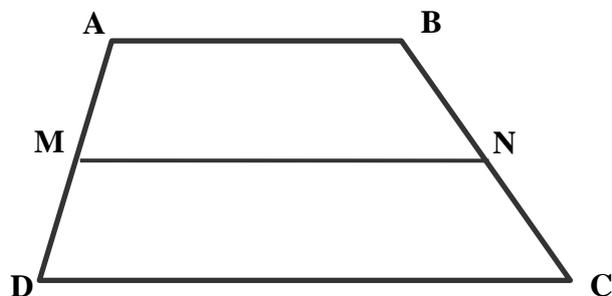
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$$



La recta **MN** es eje de simetría (**M** y **N**, puntos medios).

**BASE MEDIA DE UN TRAPECIO:** es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

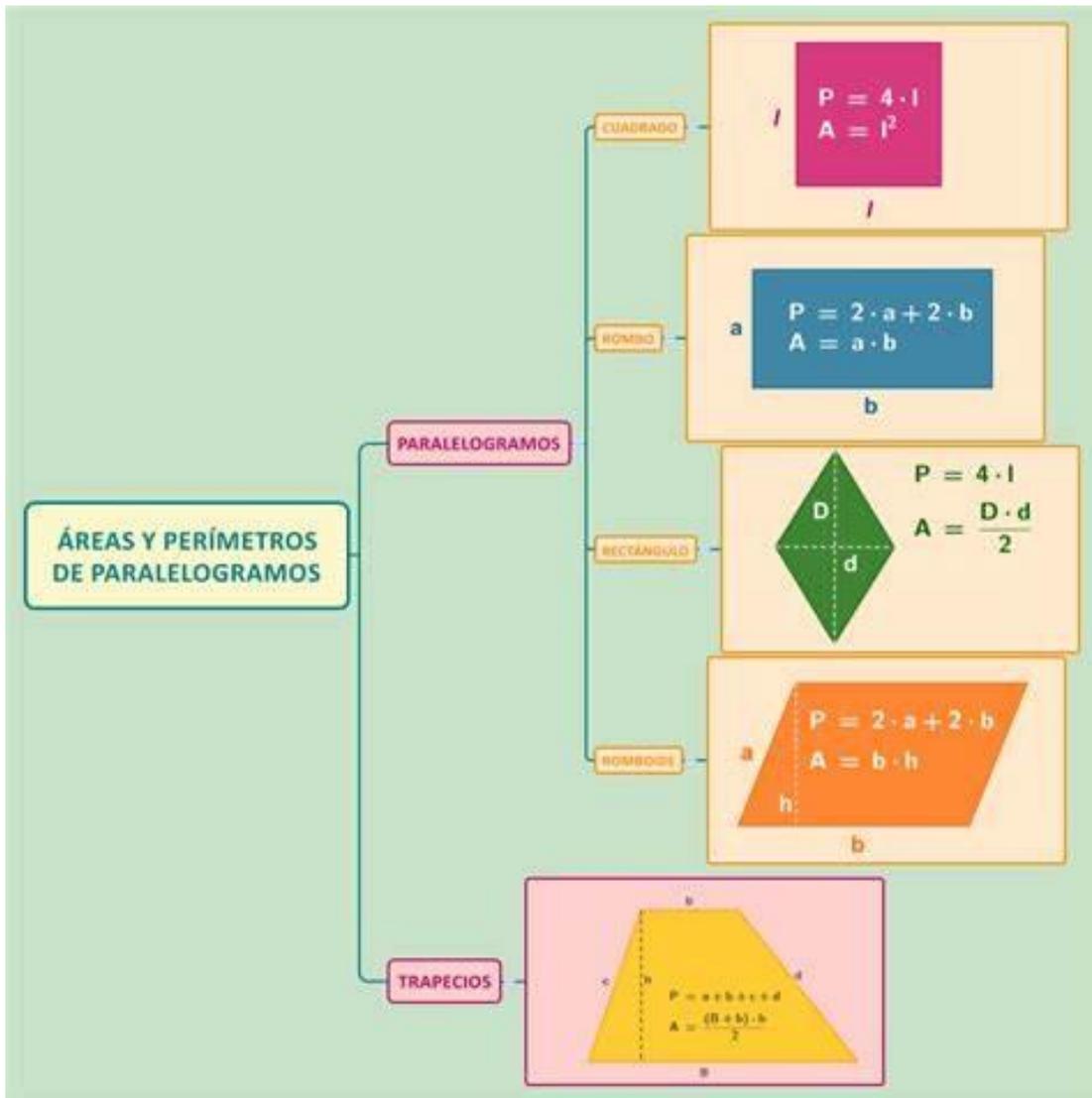


**M, N** puntos medios

### PROPIEDAD

La base media es el promedio de las bases.

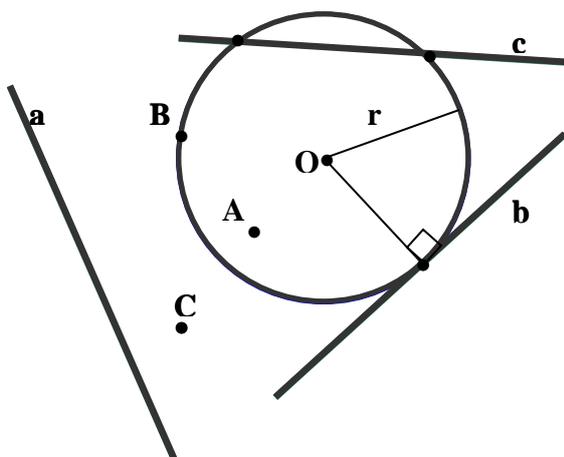
$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$



### III. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

**CIRCUNFERENCIA  $C(O, r)$ :** conjunto de los puntos del plano que equidistan (están a igual distancia) de  $O$ .

La circunferencia es una **CURVA**.



**Radio:** distancia del centro  $O$ , a cualquier punto de la circunferencia.

**A** → punto interior de la circunferencia.

**B** → punto perteneciente a la circunferencia.

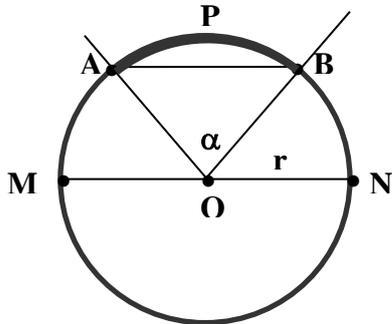
**C** → punto exterior.

**a** → recta exterior.

**b** → recta tangente (corta en un punto)

y es  $\perp$  al radio)

$c \rightarrow$  recta secante (corta en dos puntos).



$\overline{MN} = d = 2r$

$\overline{AB}$ : cuerda (segmento que une dos puntos de la circunferencia).

$\overline{MN}$ : diámetro (es la mayor de las cuerdas y es el doble del radio).

$\widehat{APB}$ : arco (parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma).

$\widehat{APB}$ : es el arco abarcado por  $\hat{\alpha}$ .

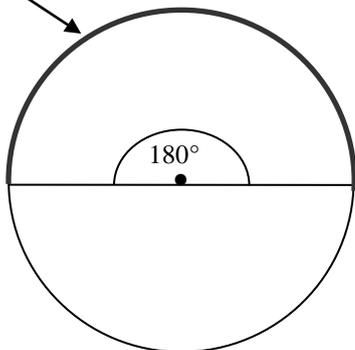
$\hat{\alpha}$ : ángulo central (tiene su vértice en el centro de la circunferencia).

**LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA =  $\pi \cdot d$**

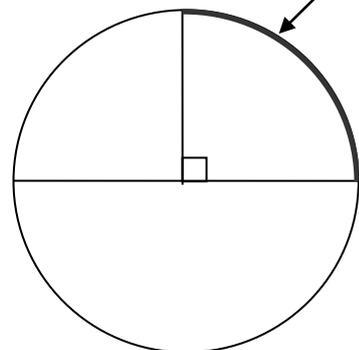
**LONGITUD del arco =  $\frac{\pi \cdot d \cdot \alpha}{360^\circ}$**

El arco abarcado por un ángulo llano se llama **SEMICIRCUNFERENCIA**; el abarcado por un ángulo recto se llama **CUADRANTE**.

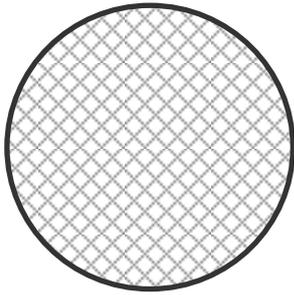
**SEMICIRCUNFERENCIA**



**CUADRANTE**



### CÍRCULO C (o, r)



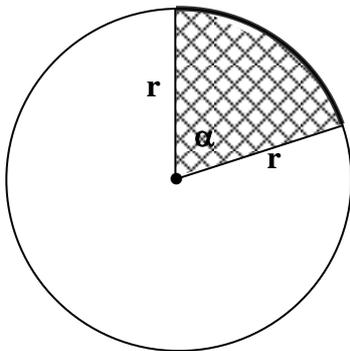
Es el conjunto de los puntos de la circunferencia y todos sus puntos interiores.

$$\text{SUPERFICIE DEL CÍRCULO} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{PERÍMETRO DEL CÍRCULO} = \pi \cdot d$$

### SECTOR CIRCULAR

Parte del círculo comprendido entre dos radios.

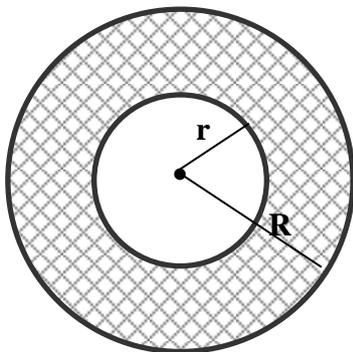


$$\text{SUPERFICIE DEL SECTOR CIRCULAR} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ}$$

$$\text{PERÍMETRO DEL SECTOR CIRCULAR} = \frac{\pi \cdot d \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ} + 2r$$

### CORONA CIRCULAR

Parte del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas (el mismo centro).



$$\text{SUPERFICIE DE LA CORONA CIRCULAR} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

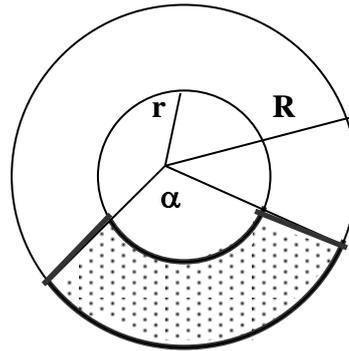
$$\text{PERÍMETRO DE LA CORONA CIRCULAR} = \pi \cdot D - \pi \cdot d$$

Diámetro mayor

diámetro menor

### TRAPECIO CIRCULAR

Parte de la corona circular comprendida entre dos radios.



$$\text{SUPERFICIE DEL TRAPECIO CIRCULAR} = \frac{(\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2) \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ}$$

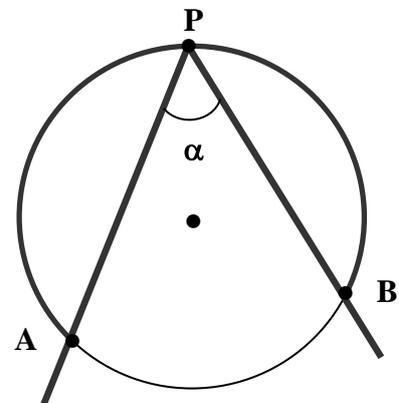
$$\text{PERÍMETRO DEL TRAPECIO CIRCULAR} = \frac{\pi \cdot D \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ} + \frac{\pi \cdot d \cdot \hat{\alpha}}{360^\circ} + 2 \cdot (R - r)$$

## ÁNGULOS INSCRIPTOS EN UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Un ángulo está inscrito en un arco de circunferencia si su vértice es un punto cualquiera del arco y sus lados pasan por los extremos del mismo.-

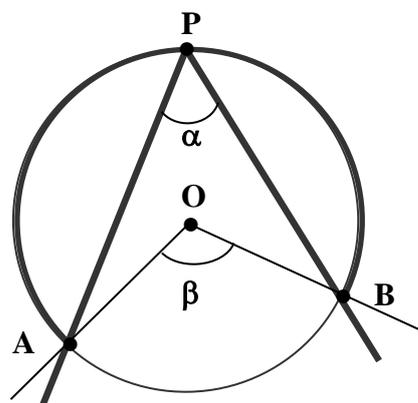
**Ejemplo:**

$\hat{\alpha}$  está inscrito en el arco  $\overset{\frown}{APB}$ .



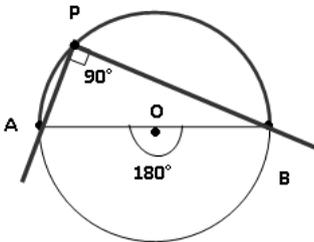
### PROPIEDAD

Un ángulo inscrito en un arco es igual a la mitad del ángulo central correspondiente (que es el que tiene centro en **O** y sus lados pasan por los extremos del arco).



$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta}}{2}$$

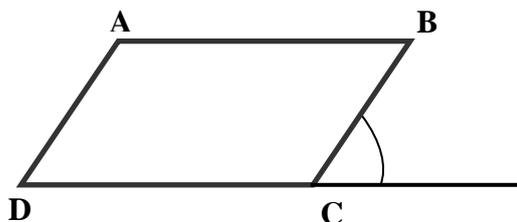
**TODO ANGULO INSCRIPTO EN UNA SEMICIRCUNFERENCIA ES RECTO**, porque el ángulo central correspondiente mide  $180^\circ$ .



## EJERCITACIÓN

- 1) El perímetro de un rectángulo mide **14 cm** y su superficie mide **12 cm<sup>2</sup>**; hallar la longitud de la base y la altura.
- 2) Hallar los ángulos interiores de un paralelogramo sabiendo que una de sus diagonales divide a uno de los ángulos en dos ángulos de **28°** y **37°** respectivamente.
- 3) Calcular:
  - a) la superficie de un cuadrado de lado **5 cm**.
  - b) La superficie de un paralelogramo de **6 cm** de base y **3,4 cm** de altura.
  - c) La superficie de un rombo cuyas diagonales miden **3 cm** y **5 cm** respectivamente.
  - d) La superficie de un trapecio cuyas bases miden **7 cm** y **12 cm** respectivamente y cuya altura mide **5 cm**.
  - e) Un cuadrado cuya diagonal mide **5 cm**.
- 4) Calcular la amplitud de los ángulos pedidos:

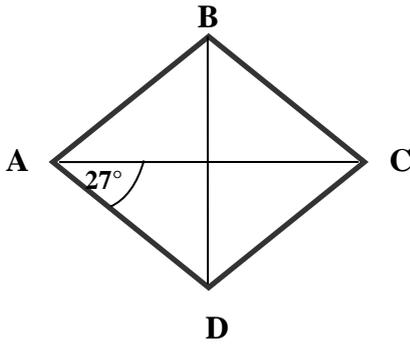
a)



**Paralelogramo**

- $\hat{A} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{B} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{C} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{D} = \dots\dots\dots$

b)



$\hat{A} = \dots\dots\dots$

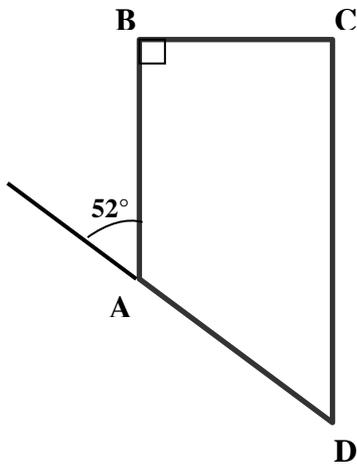
$\hat{B} = \dots\dots\dots$

$\hat{C} = \dots\dots\dots$

$\hat{D} = \dots\dots\dots$

**Rombo**

c)



$\hat{A} = \dots\dots\dots$

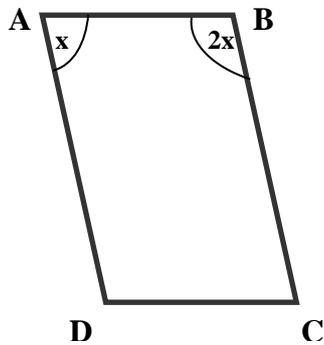
$\hat{B} = \dots\dots\dots$

$\hat{C} = \dots\dots\dots$

$\hat{D} = \dots\dots\dots$

**Trapezio recto**

d)



$\hat{A} = \dots\dots\dots$

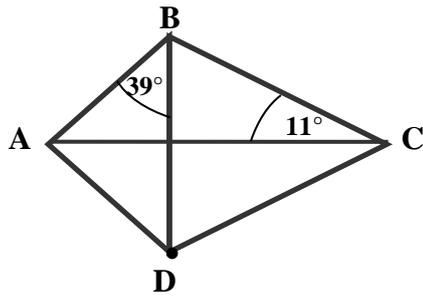
$\hat{B} = \dots\dots\dots$

$\hat{C} = \dots\dots\dots$

$\hat{D} = \dots\dots\dots$

**Paralelogramo**

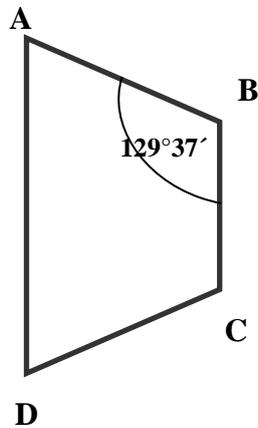
e)



Romboide

$\hat{A} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{B} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{C} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{D} = \dots\dots\dots$

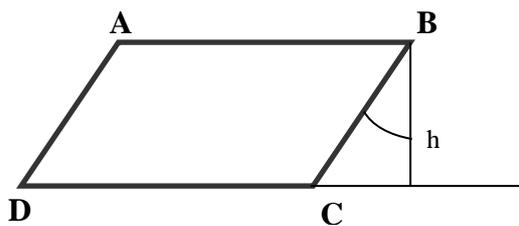
f)



Trapezio Isósceles

$\hat{A} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{B} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{C} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{D} = \dots\dots\dots$

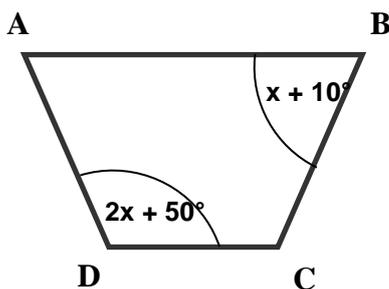
g)



Paralelogramo

$\hat{A} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{B} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{C} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{D} = \dots\dots\dots$

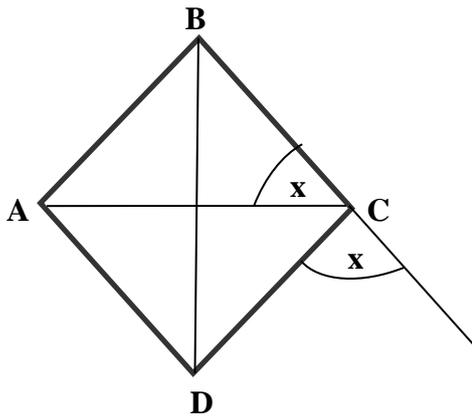
h)



Trapezio Isósceles

$\hat{A} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{B} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{C} = \dots\dots\dots$   
 $\hat{D} = \dots\dots\dots$

i)



**Rombo**

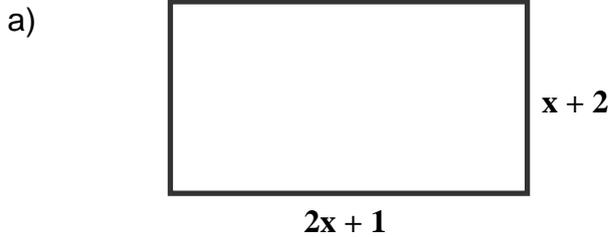
$\hat{A} = \dots\dots\dots$

$\hat{B} = \dots\dots\dots$

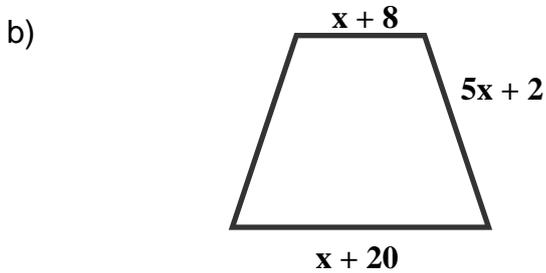
$\hat{C} = \dots\dots\dots$

$\hat{D} = \dots\dots\dots$

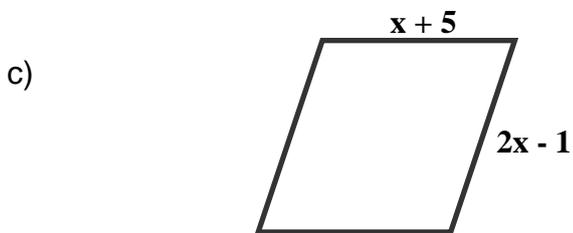
5) Hallar "x" con los datos de la figura.



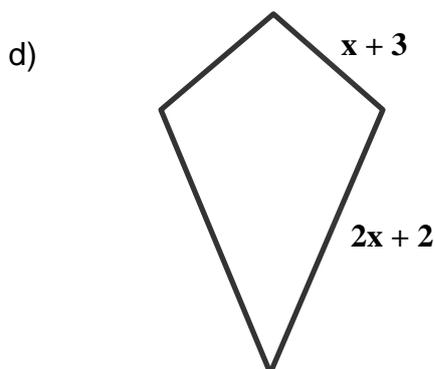
**Rectángulo**  
**Perímetro = 40 cm**



**Trapezio Isósceles**  
**Perímetro = 56 cm**

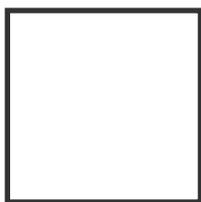


**Paralelogramo**  
**Perímetro = 32 cm**



**Romboide**  
**Perímetro = 40 cm**

e)



$x + 2$

**Cuadrado**  
Superficie =  $16 \text{ cm}^2$

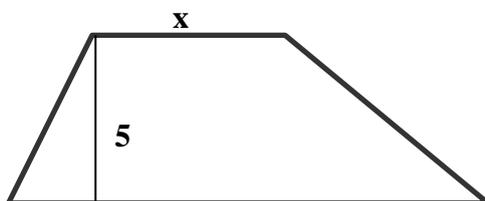
f)



$x + 3$

**Rectángulo**  
Superficie =  $75 \text{ cm}^2$

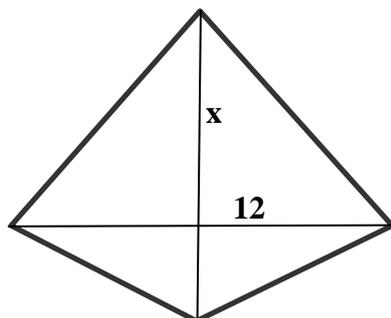
g)



15

**Trapezio**  
Superficie =  $55 \text{ cm}^2$

h)



12

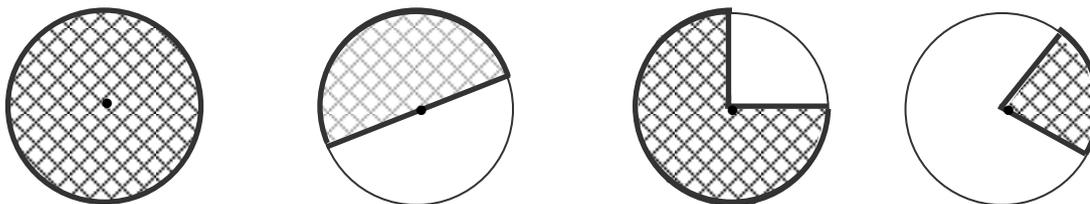
**Romboide**  
Superficie =  $72 \text{ cm}^2$

6) Completar este cuadro relativo a una circunferencia / círculo de radio 'r'.

Radio (r)	Diámetro (d)	$r^2$	Sup. Círculo	Long. circunferencia
3 cm				
	8 cm			
1 cm				
	5 cm			

			314 cm <sup>2</sup>	
				37.68 cm

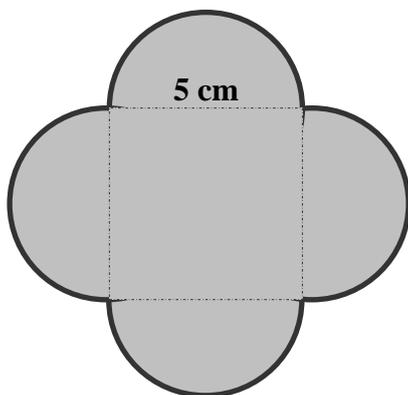
7) Calcular la superficie (o el área) de cada una de las figuras sabiendo que el radio de cada una mide **3 cm**.



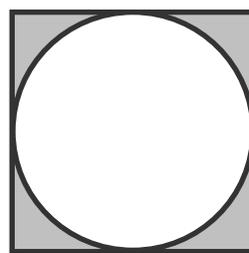
-----

8) Calcular el área sombreada.

a)

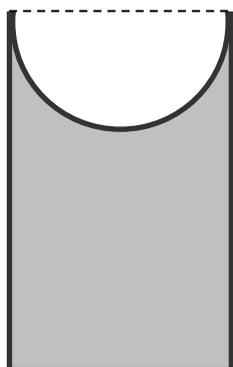


b)



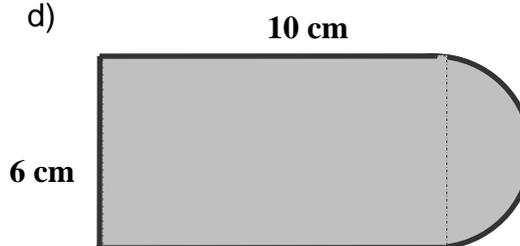
**Díámetro = 15 cm**

c)

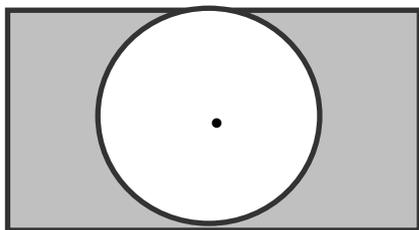


**Altura = 12 cm**  
**Radio = 2 cm**

d)

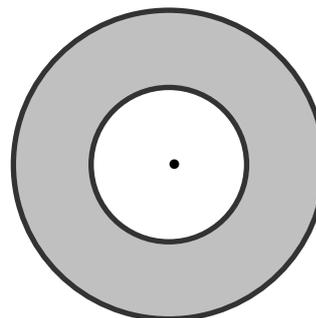


e)



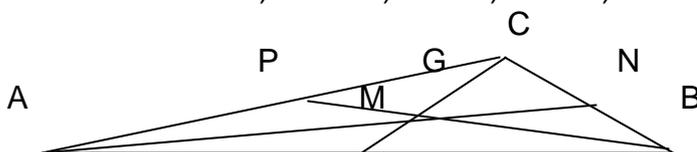
Base = 15 cm  
 Altura = 8 cm

f)

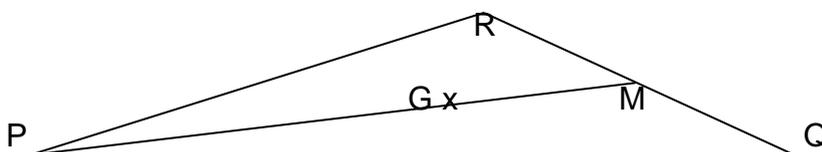


$r = 5$  cm  
 $R = 7$  cm

- 9) Dibuje tres triángulos: uno acutángulo, otro rectángulo y el tercero obtusángulo. Con escuadra y tratando de ser lo más preciso posible, trace las tres alturas de cada uno. ¿Qué observa en cada caso? ¿Qué propiedad puede sospecharse?
- 10) ¿En qué lugar del triángulo rectángulo se cortan las alturas?
- 11) En un triángulo obtusángulo el ortocentro resulta un punto exterior al triángulo; respecto del lado mayor, ¿se ubica en el semiplano que contiene o que no contiene al triángulo?
- 12) Teniendo en cuenta las características del punto de intersección de medianas mencionadas en la parte teórica (propiedades del baricentro) complete cada frase para que resulten propuestas verdaderas:
- Si B es el baricentro del triángulo RPQ y  $m_{RP}$  es la mediana correspondiente al lado  $\overline{RP}$ , entonces  $\overline{QB}$  es .....de  $m_{RP}$ .
  - Si B es el baricentro del mismo triángulo y  $m_{PQ}$  es la mediana correspondiente al lado  $\overline{PQ}$ , entonces  $\overline{RB}$  es la .....de  $m_{PQ}$ .
- 13) En el triángulo de la figura, G es el baricentro. Si  $\overline{AG} = 4$  cm,  $\overline{PG} = 0,75$ cm y  $\overline{CG} = 3$  cm calcule la medida de: a)  $\overline{GM}$  b)  $\overline{AN}$  c)  $\overline{GN}$  d)  $\overline{CM}$  e)  $\overline{PB}$



- 14) En el triángulo PQR, M es punto medio del lado  $\overline{QR}$  y G es el baricentro del triángulo, calcule las razones siguientes:  $\frac{\overline{PG}}{\overline{GM}}$ ,  $\frac{\overline{GM}}{\overline{PG}}$ ,  $\frac{\overline{PM}}{\overline{GM}}$  y  $\frac{\overline{PM}}{\overline{GM}}$ .



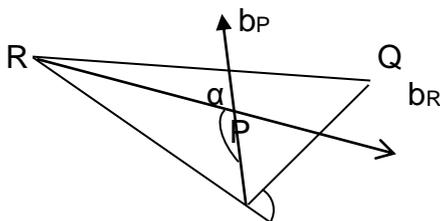
- 15) En la misma figura del ejercicio anterior se tiene que  $\overline{PM} = 6\text{cm}$ . Calcule las medidas de  $\overline{PG}$  y  $\overline{GM}$ .
- 16) Marque tres puntos: M, N y O, con la condición de que no estén alineados. Luego trace la circunferencia que pasa por esos tres puntos.
- 17) El circuncentro puede ser exterior al triángulo, interior a él o estar en el perímetro del triángulo.
- a) Indique en qué tipo de triángulos ocurre una u otra de esas situaciones:
- Es exterior en los triángulos.....
  - Es interior en los triángulos.....
  - Está sobre uno de sus lados en los triángulos.....
- b) En el caso de ser exterior, ¿en qué semiplano, respecto del lado mayor, se encuentra? Se encuentra en el semiplano que.....al triángulo.
- c) En el caso de estar en el perímetro, el circuncentro se halla exactamente en.....
- 18) a) Dibuje cualquier triángulo y halle el incentro.  
b) ¿Cómo son las distancias entre el centro de la circunferencia inscrita y cada uno de los lados del triángulo?
- 19) En cualquier triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados en una recta llamada **recta de Euler**. Verifíquelo construyendo un triángulo, determinando en él los tres puntos notables mencionados y trazando luego una recta que pase por dos de ellos; esa recta debería pasar también por ..... (complete la frase).
- 20) En el triángulo equilátero ABC, O es el baricentro. Calcule las medidas de los ángulos  $\hat{A}OB$ ,  $\hat{B}OC$  y  $\hat{A}OC$ .
- 21) ¿Qué puede decir en relación a los cuatro puntos notables de un triángulo equilátero?
- 22) ABC es un triángulo equilátero, una de sus medianas mide 12cm.  
a) Calcule el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita.  
b) ¿Qué relación hay entre ambos radios?
- 23) En el triángulo ABC, O es el incentro, el ángulo A mide  $56^\circ$  y el ángulo B mide  $80^\circ$ . Calcule los ángulos de los triángulos AOB, COB y COA.
- 24) Considere cuatro triángulos isósceles de las siguientes características:
- En uno los ángulos iguales son de  $75^\circ$ .

- En otro los tres ángulos son de  $60^\circ$  (equilátero).
- En un tercero, los ángulos de la base (iguales) miden  $45^\circ$ .
- Y por último, otro en que los ángulos iguales son de  $30^\circ$ .

Marque los cuatro puntos notables en cada caso, observe con atención y enuncia sus conclusiones:

- en relación a las posiciones que van ocupando los cuatro puntos en cada caso.
- en relación a la recta de Euler.

25) Las bisectrices  $b_P$  y  $b_R$ , correspondientes a los ángulos interiores P y R del triángulo PQR de la figura, determinan al cortarse en el punto T un ángulo  $\alpha = 112^\circ$ . El ángulo exterior en el vértice P mide  $45^\circ$ . Calcule las medidas de los ángulos interiores del triángulo PRT.



26) G es el baricentro en el triángulo ABC de la figura. Si  $\overline{AM} + \overline{BN} = 21$  cm, y  $\overline{GM} = 3$  cm, calcula:  $\overline{BN}$ ;  $\overline{BG}$  y  $\overline{GN}$ . Se sabe también que  $\overline{CR}$  es los  $\frac{2}{3}$  de  $\overline{MN}$  y que  $\overline{AB} = 15$  cm, entonces ¿cuánto mide  $\overline{GQ}$ ?

27) Complete la siguiente tabla.

Áng. Inscrito	Central	Semi inscrito	Central
$32^\circ$			$195^\circ$
	$105^\circ$	$67^\circ 49'$	
$48^\circ 23'$			$214^\circ 24'$
	$263^\circ 17'$	$70^\circ 30'$	

28) Sobre una circunferencia de centro O considere los puntos A, B, C y D. Una A con D, B con D, C con D, A con O, B con O y C con O; quedan así determinados los ángulos inscritos  $\widehat{ADB}$  y  $\widehat{BDC}$  y los centrales  $\widehat{AOB}$  y  $\widehat{BOC}$ . Si  $\widehat{ADB} = 15^\circ$  y  $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 70^\circ$ , ¿cuánto mide  $\widehat{BDC}$ ?

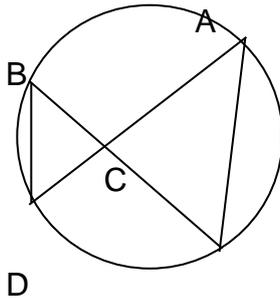
29) En un caso similar al anterior se verifica que  $\widehat{ADB} = \alpha_1$ ,  $\widehat{BDC} = \alpha_2$ ,  $\widehat{AOB} = \beta_1$  y  $\widehat{BOC} = \beta_2$ . Si  $\alpha_1 = 20^\circ$  y  $\beta_2 = 2\beta_1$ ; calcula  $\alpha_2$ .

30) Sobre una circunferencia de radio r y centro O se considera la cuerda  $\overline{AC}$ . Desde cada extremo de esa cuerda se traza una tangente a la circunferencia de manera que se cortan

perpendicularmente en un punto B. Luego ABC es un triángulo rectángulo en B. ¿Cuánto mide el central  $\widehat{AOC}$ ? ¿Qué tipo de cuadrilátero es el ABCO?

31) En la circunferencia de centro O se ha considerado el triángulo equilátero ABC, siendo  $\overline{AC}$  una cuerda de esa circunferencia y  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  tangentes a ella. Si el ángulo central que tiene por lados a  $\overline{AO}$  y  $\overline{CO}$  es  $\alpha$ ; calcule la medida de  $\alpha$ .

32)



C no es centro de la circunferencia

$$\text{áng. } ACD = 95^\circ$$

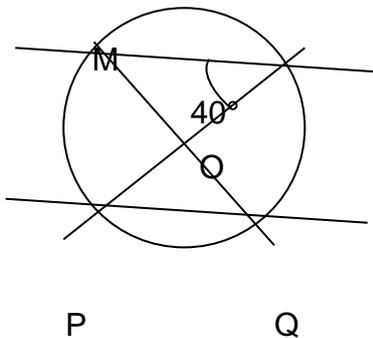
$$\text{áng. } CEA = 40^\circ$$

E Calcule el ángulo DBE.

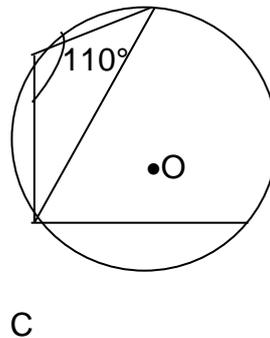
33) Sobre el perímetro de una circunferencia de centro O se han considerado tres puntos: A, B y C que forman el triángulo ABC. El ángulo de vértice A mide  $48^\circ$ ; el ángulo central AOC mide  $112^\circ$ ; ¿cuánto miden los ángulos B y C de dicho triángulo?

34) Calcule  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en cada uno de los siguientes casos, sabiendo que todas son circunferencias de centro O.

a)



b



B

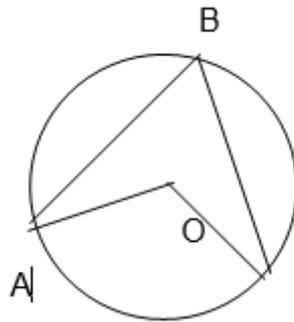
$$r \parallel s; \widehat{OMN} = z; \widehat{OQP} = x$$

$$\widehat{OPQ} = y$$

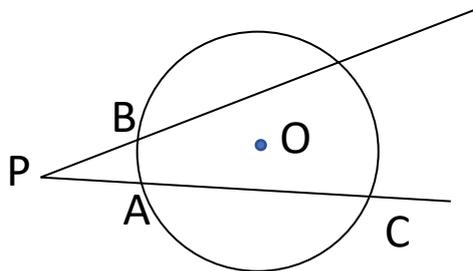
$$\overline{AC} = \overline{AB}; \text{áng. } A = x$$

$$\text{áng. } B = z; \text{áng. } ACB = y$$

35) En la circunferencia de centro O del dibujo se verifica que arco AB = arco BC y ángulo central  $\widehat{AOC} = 140^\circ$ . Calcule  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{OCB}$ .



36) Observe la figura y las consignas que están a continuación de ella.



Circunferencia de centro O.  $\overrightarrow{BD}$  y  $\overrightarrow{AC}$  secantes que se cortan en P.

Marque con línea de puntos los segmentos  $\overline{DO}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{AO}$  y  $\overline{OB}$  y demuestre que:

$$\widehat{CPD} = \frac{\widehat{COD} - \widehat{AOB}}{2}.$$

37) Se definen como **cuadriláteros cíclicos** a aquellos cuadriláteros que están inscriptos en una circunferencia. Entonces sus lados son cuerdas de la circunferencia.

Los cuadriláteros cíclicos cumplen las siguientes propiedades:

**1.- Los ángulos opuestos de esos cuadriláteros son suplementarios.**

**2.- Si un trapecio es cíclico entonces es isósceles.**

**3.- Los romboides cíclicos tienen dos ángulos rectos.**

Problema: Justifique las propiedades anteriores.

38) Calcule los ángulos interiores de los cuadriláteros cíclicos en cada uno de los siguientes casos.

a) ABCD es un cuadrilátero inscripto en una circunferencia de centro O. Se sabe que:  $\widehat{AOB} = 40^\circ$ ;  $\widehat{BOC} = 120^\circ$  y  $\widehat{DOC} = 90^\circ$ .

- b) ABCD es un cuadrilátero inscripto en una circunferencia de centro O, siendo la diagonal  $\overline{AC}$  uno de los diámetros de la circunferencia y sabiendo que  $\widehat{DCB} = 75^\circ$ .
- c) ABCD está inscripto en la circunferencia de centro O y de él se sabe que:  $\widehat{AOB} = 45^\circ$ ;  $\widehat{COD} = 85^\circ$  y  $\widehat{DCB} = 85^\circ$ .
- 39) El ABCD es un cuadrilátero cíclico inscripto en una circunferencia de centro O. Determine los ángulos interiores correspondientes a los vértices B, C y D a partir de los siguientes datos: ángulo central  $\widehat{AOC} = 134^\circ$  y ángulo de vértice A =  $84^\circ$ .
- 40) En una circunferencia de centro O se halla inscripto un cuadrilátero cíclico LMNP, del cual se sabe que:  $\widehat{LOP} = 2x + 20^\circ$ ;  $\widehat{LOM} = x + 4^\circ$ ;  $\widehat{MON} = 3x$  y  $\widehat{NOP} = 3x - 6^\circ$ . ¿Cuánto miden los ángulos interiores?
- 41) PQRS es un cuadrilátero cíclico inscripto en una circunferencia de centro C. Se sabe que el lado  $\overline{PS}$  es un diámetro de la circunferencia y que los ángulos centrales  $\widehat{PCQ}$ ;  $\widehat{QCR}$  y  $\widehat{RCS}$  miden respectivamente  $x$ ;  $2x - 12^\circ$  y  $x + 20^\circ$ . ¿Cuánto miden los ángulos interiores del cuadrilátero?
- 42) Calcule el área de los polígonos regulares tales que:
- tiene seis lados y miden 6cm cada uno.
  - es un hexágono y el radio de la circunferencia donde se halla inscripto es de 35m.
  - es un octógono de 5cm de lado y cuya apotema vale la mitad del lado.
  - es un octógono de 20cm de radio y apotema  $10\sqrt{2}$  cm.
  - el perímetro vale 4,5m, tiene 10 lados y el radio de la circunferencia donde se halla inscripto mide 1,45m.
- 43) Considera el hexágono regular ABCDEF de 10cm y de centro O; calcula el área del polígono resultante de considerar en cada caso puntos del hexágono dado:
- el cuadrilátero AOEF.
  - el cuadrilátero BCDE.
  - el cuadrilátero ACDE.
  - el triángulo CDE.
  - si los puntos M y N son los puntos medios de los radios  $\overline{EO}$  y  $\overline{OC}$ . el cuadrilátero MDNA.
  - si M, N, P y Q son los puntos medios de los radios  $\overline{OE}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OC}$  y  $\overline{OB}$ ; el hexágono FMNPQA.
  - si M y N son puntos medios de los radios  $\overline{OE}$  y  $\overline{OB}$  y P y Q puntos medios de los lados  $\overline{EF}$  y  $\overline{AB}$  respectivamente; el octógono PMDCNQAF.
  - si M, N, P, Q, R y S son los puntos medios de las apotemas correspondientes a los lados  $\overline{DC}$ ,  $\overline{CB}$ ,  $\overline{BA}$ ,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{FE}$  y  $\overline{ED}$  respectivamente; la estrella AQFRESDMCNBP.
  - la "estrella aserrada" (con forma de sierra) resultante de considerar los puntos medios de los radios y de unirlos con el vértice correspondiente a ese radio y con el vértice consecutivo.

44) Construya un hexágono regular inscripto en una circunferencia, haga centro en cada vértice y con radio la mitad del lado trace arcos de circunferencia que vayan desde la mitad de un lado hasta la mitad del lado consecutivo, le quedará una superficie interior (de bordes curvos) con seis puntas.

Calcule, usando como radio a  $r$  (es decir trabajando en forma general, sin valores numéricos), el área de la circunferencia, el área del hexágono y el área de la figura “estrellada”; halle entonces:

- a) la razón entre la circunferencia y el hexágono;
- b) la razón entre la circunferencia y la figura estrellada
- c) la razón entre el hexágono y la figura estrellada.

## RESPUESTAS

- 1)  $\hat{B} = 40^\circ$  y  $\hat{C} = 50^\circ$
- 2) 4 cm y 3 cm
- 3)  $65^\circ, 115^\circ, 65^\circ$  y  $115^\circ$
- 4) a)  $25 \text{ cm}^2$  ; b)  $20,4 \text{ cm}^2$  ; c)  $7,5 \text{ cm}^2$  ; d)  $47,5 \text{ cm}^2$  ; e)  $12,5 \text{ cm}^2$
- 5) a)  $\hat{A} = \hat{C} = 131^\circ, \hat{B} = \hat{D} = 49^\circ$  ; b)  $\hat{A} = \hat{C} = 54^\circ, \hat{B} = \hat{D} = 126^\circ$  ;  
 c)  $\hat{A} = 128^\circ$  ;  $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$  ;  $\hat{D} = 52^\circ$  ; d)  $\hat{A} = \hat{C} = 60^\circ, \hat{B} = \hat{D} = 120^\circ$  ;  
 e)  $\hat{A} = 102^\circ$  ;  $\hat{C} = 22^\circ$  ;  $\hat{B} = \hat{D} = 118^\circ$  ; f)  $\hat{A} = \hat{D} = 50^\circ 23'$  ,  $\hat{B} = \hat{C} = 129^\circ 37'$  ;  
 g)  $\hat{A} = \hat{C} = 111^\circ 15'$  ,  $\hat{B} = \hat{D} = 68^\circ 45'$  ; h)  $\hat{A} = \hat{B} = 50^\circ, \hat{C} = \hat{D} = 130^\circ$  ;  
 i)  $\hat{A} = \hat{C} = 120^\circ, \hat{B} = \hat{D} = 60^\circ$
- 6) a)  $17\frac{1}{3} \text{ cm}$  ; b) 2 cm ; c) 4 cm ; d) 5 cm ; e) 2 cm ; f) 12 cm ; g) 7 cm ; h) 12 cm
- 7) 6 cm,  $9 \text{ cm}^2$  ,  $28,26 \text{ cm}^2$  , 18,84 cm  
 4 cm,  $16 \text{ cm}^2$  ,  $50,24 \text{ cm}^2$  , 25,12 cm  
 2 cm,  $1 \text{ cm}^2$  ,  $3,14 \text{ cm}^2$  , 6,28 cm  
 2,5 cm,  $6,25 \text{ cm}^2$  ,  $19,63 \text{ cm}^2$  , 15,7 cm  
 10 cm, 20 cm,  $100 \text{ cm}^2$  , 62,8 cm  
 6 cm, 1 cm,  $36 \text{ cm}^2$  ,  $113,04 \text{ cm}^2$
- 8)  $28,26 \text{ cm}^2$  ,  $14,13 \text{ cm}^2$  ,  $21,2 \text{ cm}^2$  ,  $7,065 \text{ cm}^2$
- 9)  $64,25 \text{ cm}^2$  ,  $48,38 \text{ cm}^2$  ,  $41,72 \text{ cm}^2$  ,  $74,13 \text{ cm}^2$  ,  $69,76 \text{ cm}^2$  ,  $75,36 \text{ cm}^2$

## FUNCIONES

Antes de abordar el tema, recordemos algunos conceptos

**RECTA:**

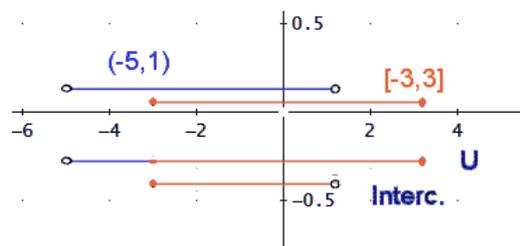
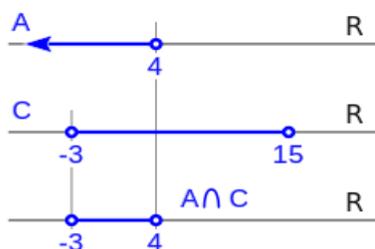
Conjunto de infinitos puntos sucesivos situados en una misma dirección

**RECTA NUMÉRICA:**

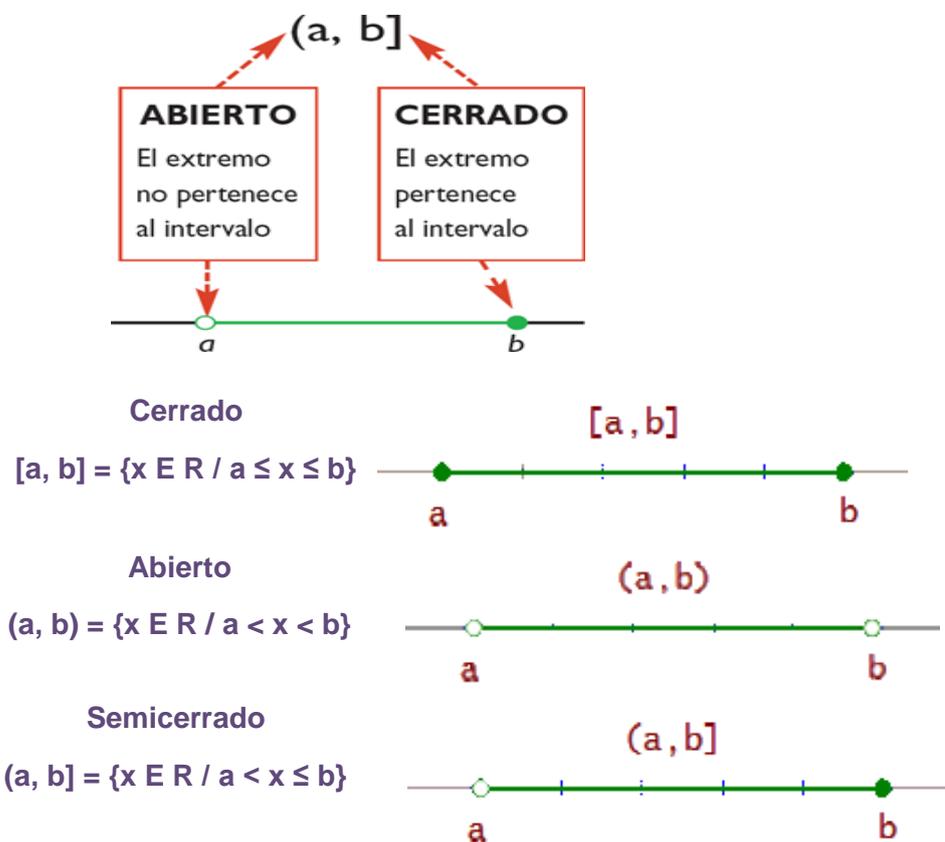
Recta en la que a cada punto le corresponde un número del conjunto de números reales

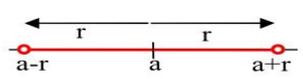
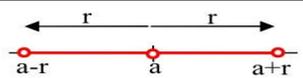
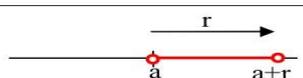
**INTERVALO:**

Subconjunto del conjunto de números reales, comprendido entre dos extremos

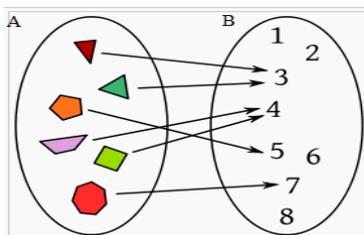


**Clasificación de entornos según los extremos de e**



CONJUNTOS MÁS IMPORTANTES DE LA RECTA REAL			
SUBCONJUNTO	SIMBOLO	DEFINICIÓN	REPRESENTACIÓN
Intervalo Abierto	$(a,b)$	$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Números entre a y b (no incluidos)	
Intervalo Cerrado	$[a,b]$	$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Números entre a y b (incluidos)	
Intervalos Semiabierto	$(a,b]$ $[a,b)$	$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ Números entre a y b (uno incluido)	
Semirrectas abiertas	$(a, \infty)$ $(-\infty, b)$	$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
Semirrectas cerradas	$[a, \infty)$ $(-\infty, b]$	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	
Entorno de centro a y de radio r	$E(a,r)$	$E(a,r) = (a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} :  x-a  < r\}$ Números cuya distancia al centro, a, es menor que el radio, r.	
Entorno reducido centro a y radio r	$E^*(a,r)$	$E^*(a,r) = E(a,r) - \{a\} = (a-r, a) \cup (a, a+r)$ Entorno pero sin contar el centro	
Entorno lateral izquierdo	$E^-(a,r)$	$E^-(a,r) = (a-r, a)$	
Entorno lateral derec	$E^+(a,r)$	$E^+(a,r) = (a, a+r)$	

RELACIONES MATEMÁTICAS



RELACIÓN:

Una relación es un conjunto formado por pares ordenados  $(x,y)$  relacionados entre sí por alguna condición o propiedad

En símbolos:

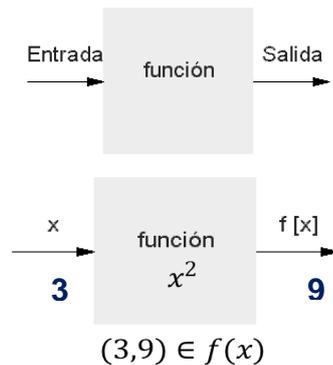
$$R = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Matemáticamente, una relación es el conjunto de pares ordenados en los que el primer elemento pertenece al conjunto de salida y el segundo elemento pertenece al conjunto de llegada

FUNCIÓN

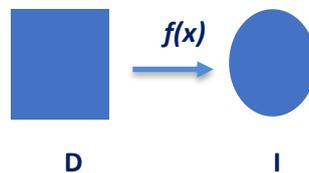
Una función es una relación que a cada elemento del conjunto de salida le hace corresponder exactamente un elemento del conjunto de llegada.

Podemos decir que una función es una orden que se le da a un element de entrada y cuando se cumple la orden temenos el element de salida



El último esquema representa lo que hacemos con una calculadora: marcamos la tecla que dice “3”, después le damos la siguiente orden: elevá al número 3 al cuadrado y en el visor aparece “9”; lo que acabamos de hacer es una función.

Matemáticamente decimos que y es imagen de x, mediante la función  $f(x) = x^2$

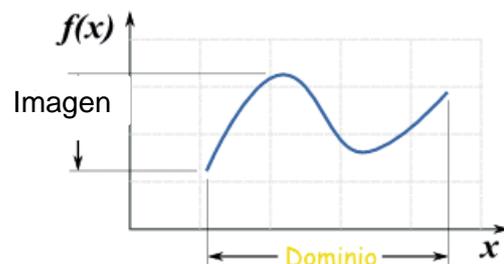
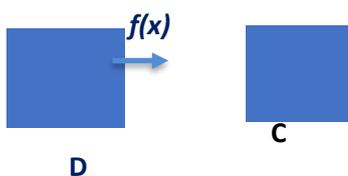


Al conjunto de todos los valores a los que se aplica una función se lo denomina dominio.

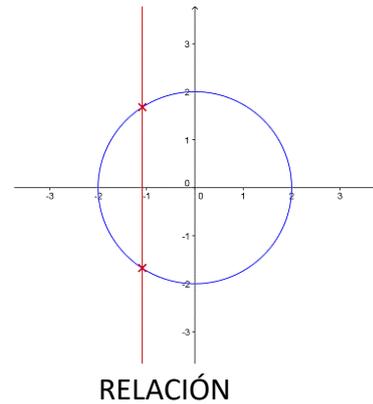
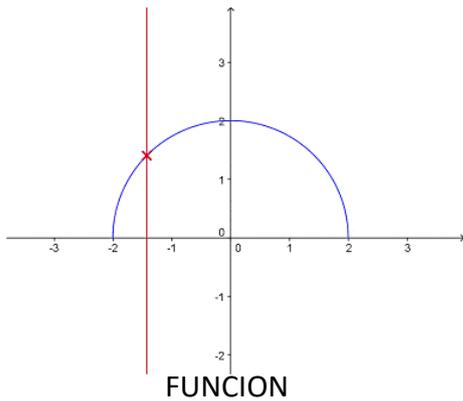
Al segundo conjunto se denomina codominio o imagen.

Genéricamente decimos: los pares ordenados  $(x, y)$ , pertenecen la función f, con dominio en el conjunto D e imagen en el conjunto I si y solo si “x” pertenece a D y “y” pertenece a I

$$f: D \rightarrow I / (x, y) \in f \Leftrightarrow x \in D \wedge y \in I$$



Cuando trabajamos con gráfica de funciones en ejes cartesianos, al trazar una paralela al eje “y”, si la paralela corta la gráfica de la función en un solo punto, estamos en presencia de una función



## FUNCIONES

Vamos a comenzar definiendo antes de definir función polinómica, veamos que es un polinomio

### POLINOMIO

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios o *términos*. Cada monomio está compuesto por el producto de:

- un *número real llamado coeficiente, es lo que conocemos.*
- una o varios factores desconocidos, representados por letras, como "x", "y", ..., llamadas variables

**Grado de un monomio:** se obtiene sumando los exponentes de las variables

Grado de monomi  $P(x,y) = 3x^3y - x^7 + x - y^2 \Rightarrow$  **Polinomio de grado 4**



**Monomio de grado 4**

Una función **polinómica** es una relación que a cada valor de la entrada (variable) que se le asigna un valor al polinomio correspondiente

Matemáticamente, si

$$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Definimos p(x)

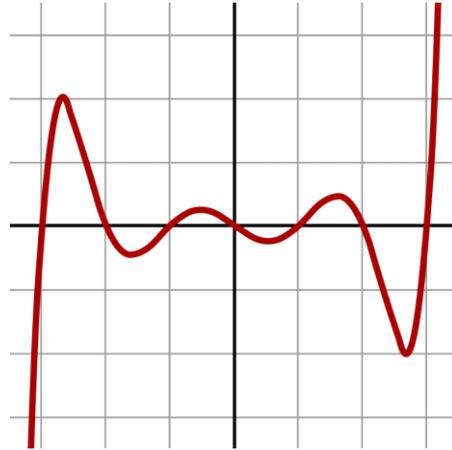
$$p(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / p(x,y) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Ejemplo: Sea

$$P(x,y) = 3x^3y - x^7 + x - y^2$$

$$p(x,y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / p(x,y) = 3x^3y - x^7 + x - y^2$$

Si  $x = -1$  ;  $y = 2$  entonces  $f(x,y) = 3 \cdot (-1)^3 \cdot y - (-1)^7 + (-1) - 2^2$



Gráfica de una función de grado 7

En el conjunto de los reales la gráfica corta tantas veces al eje x como lo indica el grado del polinomio

Veamos algunas de las funciones polinómicas según el grado

Grado	Nombre	Expresión	Representación
0	<a href="#">función constante</a>	$y = a$	Rectas horizontales o paralelas al eje x
1	<a href="#">función lineal</a>	$y = ax + b$ es un <a href="#">binomio</a> del primer grado	Rectas oblicuas
2	<a href="#">función cuadrática</a>	$y = ax^2 + bx + c$ es un <a href="#">trinomio</a> del <a href="#">segundo grado</a>	Parábolas
3	<a href="#">función cúbica</a>	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un <a href="#">cuatrinomio</a> de tercer grado	Curvas cúbicas

## Propiedades de funciones polinómicas

- La gráfica de una función polinómica corta al eje Y en  $(0, a_0)$ .
- Corta al eje X un número de veces igual o inferior al grado del polinomio  $n$ .
- El número de **máximos y mínimos relativos** de una función polinómica es, como mucho, el grado del polinomio menos 1 ( $n - 1$ ).
- En las funciones polinómicas no existen **asíntotas**.
- El número de **puntos de inflexión** es igual o menor a  $n - 2$ .
- Si el grado de todos los términos fuese impar, la gráfica sería simétrica respecto al origen de coordenada. Pero si todos los términos tuviesen grado par, la gráfica sería simétrica respecto al eje OY.
- En la gráfica de una función polinómica, la **rama** de la derecha será creciente cuando el coeficiente del término de mayor grado,  $a_n$ , sea positivo. Y esa rama será decreciente cuando  $a_n$  sea negativo.
- En la gráfica, la **rama** de la izquierda será decreciente cuando se cumpla que el grado del polinomio  $n$  sea par y el coeficiente del término de mayor grado,  $a_n$ , sea negativo. También será decreciente la rama izquierda cuando  $n$  sea impar y, al mismo tiempo,  $a_n$  sea positivo. En el resto de los casos, la rama izquierda será siempre creciente (irá creciendo hacia arriba).
- La **suma** de dos **funciones** polinómicas es una **función** polinómica. Es decir:

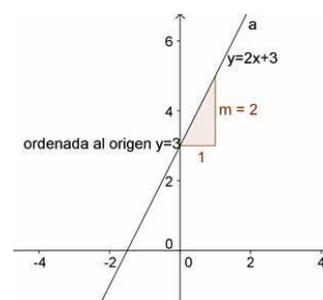
**$f(x)+g(x)$  es polinómica**

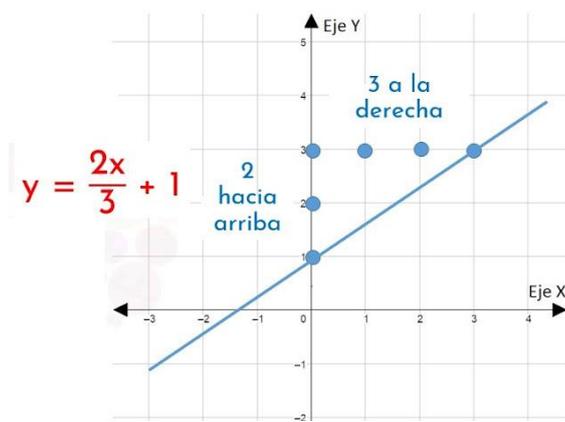
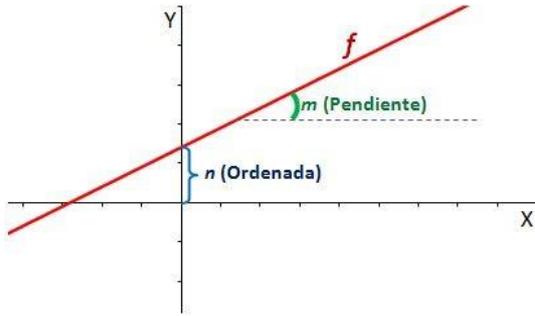
### FUNCIÓN LIEAL

**Es una función polinómicas de primer grado** o de grado 1: son 1.

$$f(x) = mx + n$$

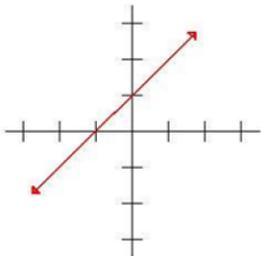
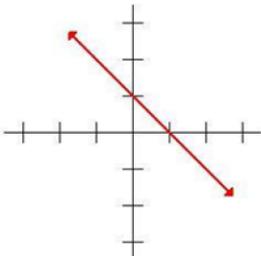
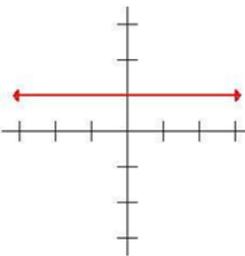
siendo  $m$  la pendiente y  $n$  la ordenada





Su representación gráfica es una recta de pendiente  $m$  y la ordenada al origen,  $n$ , es el valor en que la recta corta al eje  $y$ .

Inclinación de la recta según la pendiente sea positiva, nula o negativa

$m > 0$	$m < 0$	$m = 0$
		
Función Creciente	Función Decreciente	Función Constante

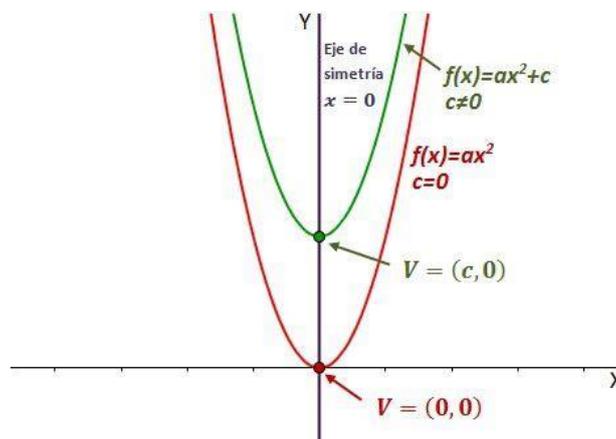
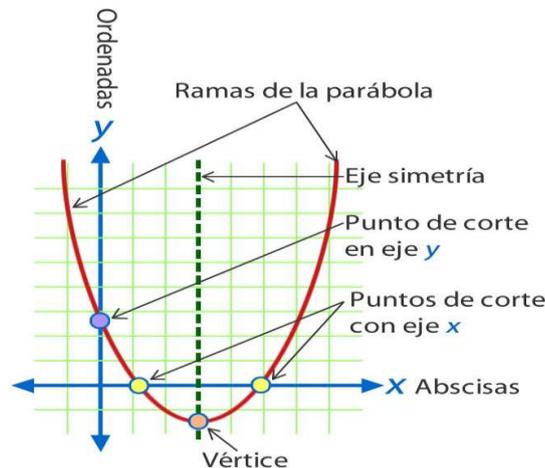
**FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Función polinómica de segundo orden

$$y = ax^2 + bx + c$$

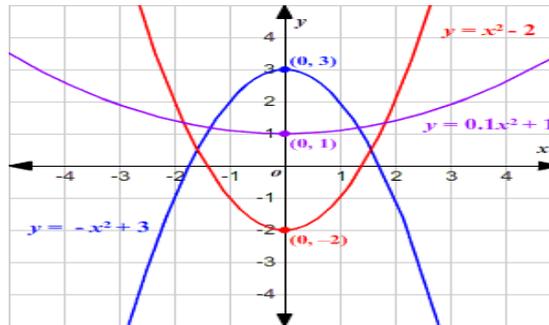
↖ ↖ ↖  
**Cuadrático**    **Lineal**    **Independiente**

<b>Función</b>	<b>Término Cuadrático</b>	<b>Lineal</b>	<b>Independ.</b>
$y = ax^2 + bx + c$			
$y = 2x^2$	$2x^2$	0	0
$y = \sqrt{5}x^2 + 12x - \frac{7}{2}$	$\sqrt{5}x^2$	$12x$	$-\frac{7}{2}$
$y = \frac{x^2}{5} + x = 100$	$\frac{x^2}{5}$	$x$	-100
$y = (x - 2)(3x + 5)$	$3x^2$	$-x$	-10

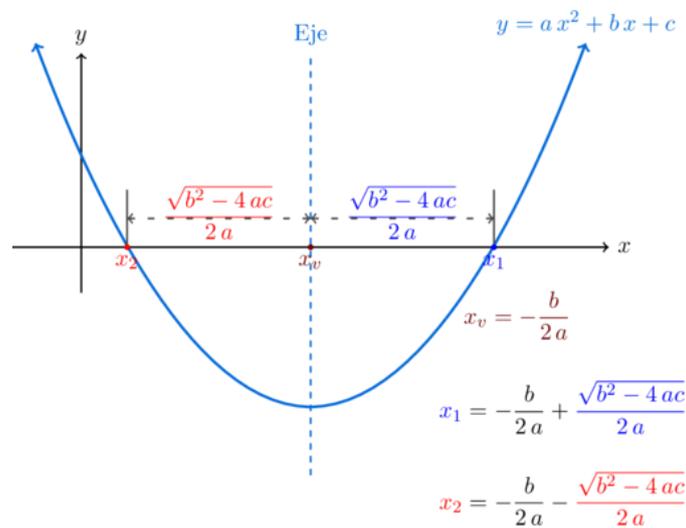


**Raíces de la función cuadrática:** valor de la abscisa donde la gráfica la corta

A menor coeficiente del término más abierta la parábola



Las raíces de la función cuadrática son los valores donde la parábola corta el eje de abscisas



**ECUACIÓN:**

Igualdad entre dos expresiones matemáticas, cada una de ellas llamada miembros de la igualdad

$$3x + 6 = 2x + 9$$

**DIFERENCIA ENTRE ECUACIÓN Y FUNCIÓN**

**ECUACIÓN**



**IGUALDAD**

$$5x + 3 = 12$$

$$-8x + 6 = y + 9$$

**FUNCIÓN**



**RELACION ENTRE VARIABLES**

$$-8x + 6 = y + 9$$

$$-8x - 3 = y$$

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones, mientras que una función relaciona dos o más variables

**TODA FUNCIÓN PUEDE EXPRESARSE COMO ECUACIÓN PERO NO TODA ECUACIÓN ES UNA FUNCIÓN.**

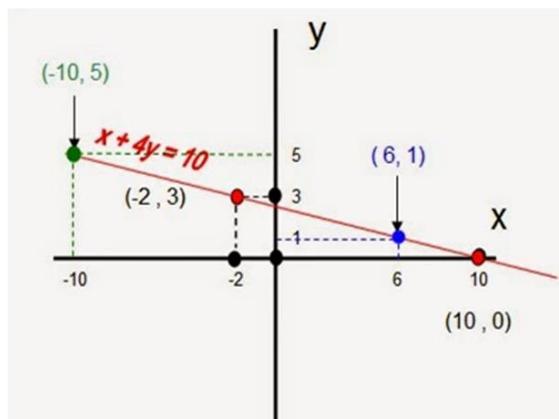
Por ejemplo la ecuación de la circunferencia no es función porque si trazo una paralela al eje, corta a la gráfica en dos puntos.

$$x^2 + y^2 = 1$$

**ECUACIÓN ASOCIADA A UNA FUNCIÓN**

Si  $f(x) = y \Rightarrow f(x) = 0$  es la ecuación asociada a  $f(x)$

Ejemplo:



Si  $x + 4y = 10$

$$4y = 10 - x$$

$$y = 10/4 - x/4$$

$$y = -x/4 + 5/2$$

Si  $y = 0$

$$0 = -x/4 + 5/2$$

$$-8x + 6 = y + 9$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad ?$$



$$-8x + 6 = y + 9$$

FUNCIÓN

$$-8x - 3 = y$$

ECUACIÓN

$$x = 10$$

**TODA FUNCIÓN PUEDE EXPRESARSE COMO ECUACIÓN**

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Ecuación lineal de dos incógnitas:

$$y = ax + b$$

Para resolver una ecuación lineal que tiene dos incógnitas se debe hallar un par de valores para  $X$  y para  $Y$  que satisfagan la igualdad.

Ejemplo

$$x + 6y = 12$$

$$y = (12 - x) : 6$$

$$y = -x:6 + 12:6$$

Hallamos el valor de  $X$  reemplazando el valor de  $Y$  obtenida  $y = 4$

$$x = 12 - 6 \times 4$$

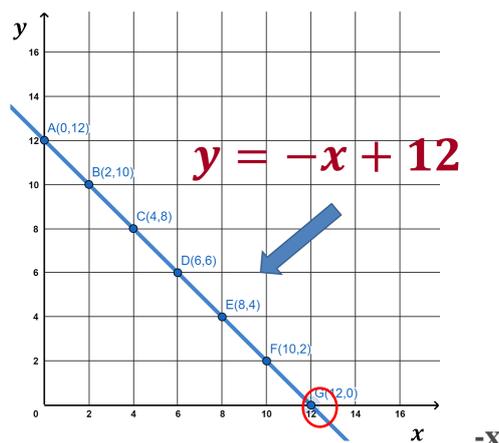
**$X = -12$  Es el valor donde la recta corta el eje de abscisas**

**Verificación:** se reemplaza los valores obtenidos en la expresión inicial  $x + 6y = 12$

$$-12 + 6 \cdot 4 = 12$$

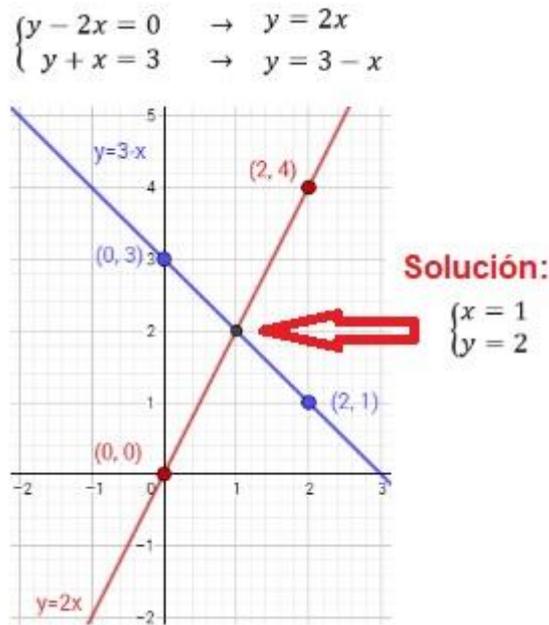
$$12 = 12$$

**Resolución gráfica de la ecuación  $-x + 12$ :**

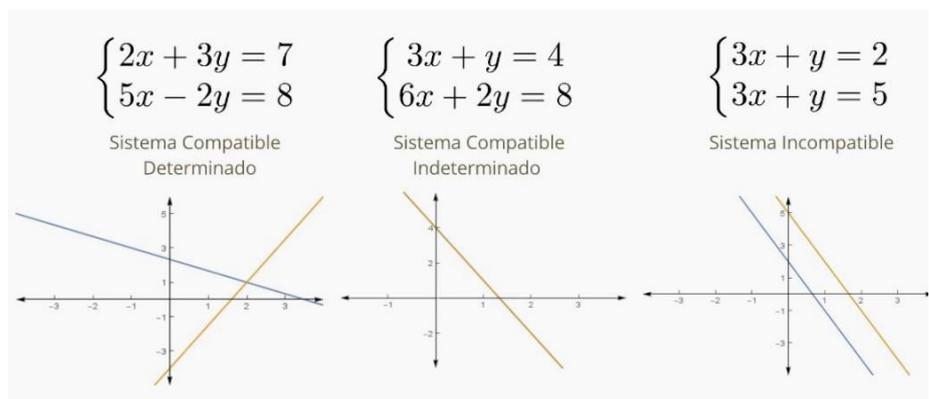


## SISTEMA DE ECUACIONES DE DOS INCÓGNITAS

Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones implica encontrar los puntos de la gráfica comunes a ambas funciones



**Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales**



**Otros casos de sistemas**

	$\Delta > 0$ Dos puntos de intersección.	$\Delta = 0$ Un punto de intersección.	$\Delta < 0$ Ningún punto de intersección.
Sistema formado por una recta y una parábola.  $\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$	 La recta es <b>secante</b> a la parábola.	 La recta es <b>tangente</b> a la parábola.	 La recta es <b>exterior</b> a la parábola.
Sistema formado por dos parábolas.  $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$			

**EJERCITACIÓN**

26) Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $3.(2x - 1) = 5x + 3$

b)  $3.(2x - 1) = 8.\left(x - \frac{9}{8}\right)$

c)  $5.(3x - 1) - 2x = 2 - (7x + 3)$

d)  $\frac{1}{5} + 3.\left(\frac{3x}{5} - 1\right) = \frac{2}{5} - \frac{1x}{5}$

e)  $\frac{x - 1}{3} - \frac{2 + x}{2} = 1$

f)  $7 - \frac{1 - x}{2} = \frac{8 + x}{3}$

g)  $2 + \frac{3 + 3x}{2} = \frac{1 - 2x}{3}$

h)  $0,5 - 0,3x = 0,2.(5 - 3x)$

i)  $3.(5x + 4) - 1 = 5.(2 + 3x) + 1$

j)  $(5x - 8).3 = 5.(3x - 2)$

k)  $\frac{x}{2} - \frac{x - 3}{3} = 10x - \frac{x + 4}{2} + \frac{19}{3}$

l)  $3x.(2 - x) + 4x - 2 = x.(15 - 3x) - 1,5$

27) Resolver las siguientes ecuaciones incompletas, sin usar la fórmula resolvete.

a)  $x^2 - 16 = 0$     b)  $2x^2 - 8x = 0$     c)  $4x^2 + 64 = 0$     d)  $x - 7x^2 = 0$

e)  $2x^2 - 1 = 0$     f)  $2x^2 - 6x = 0$     g)  $x^2 + 1 = 0$     h)  $5x^2 = 3x$

i)  $(x - 3)^2 = x + 9$     j)  $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{2}x$     k)  $5x^2 + 35 = 0$     l)  $-3x^2 = -9$

28) Resolver las ecuaciones:

a)  $x^2 - 4x - 5 = 0$     b)  $x^2 - 4x + 6 = 0$     c)  $x^2 - 2x + 2 = 0$

d)  $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$     e)  $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$     f)  $4x^2 + x = 0$

g)  $-x^2 - 4 = 0$     h)  $-2x^2 + 6x - 4 = 0$     i)  $x^2 - 2 = 0$

j)  $5x^2 = 3x$     k)  $(x - 3)^2 = x + 9$     l)  $\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{2}x$

m)  $5x^2 + 35 = 0$     n)  $-3x^2 = -9$

29) Resolver los sistemas:

a) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x + 6y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} -4x + y = 6 \\ -8x - 2y = -1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{y+1} = \frac{1}{3} \\ \frac{x+1}{y-1} = 3 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} \frac{1-y}{2} + \frac{x+3}{5} = 0 \\ \frac{x+2}{3} + \frac{2y+1}{4} = \frac{5}{12} \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7 \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 5 \\ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

i) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$